MATHEMATICS

المُسند في

الرياضيات

الخامس العلمي

الجزء الأول

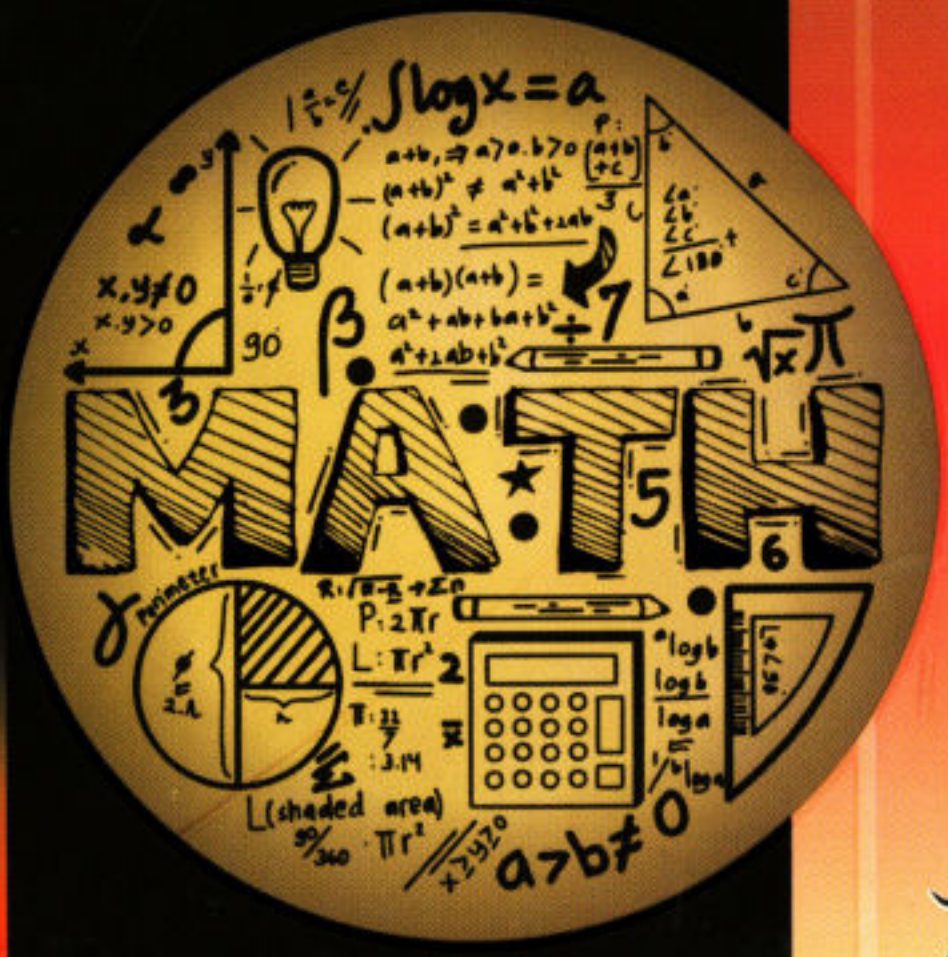
خمسة فصول

2024

الأستاذ

حيدر وليد

07701780364



ملازم دار المغرب

077 100 55555

Mob: 6561

Telegram : @SadsHelp

1

MATHEMATIC

المُسند في الرياضيات

الاستاذ حيدر وليد

الخامس العلمي

الفصل الأول

اللوغارتمات

ملازم دار المغرب
077 100 55555
Mob: 6561

Telegram : @SadsHelp

الفهرست

Index

ت	تسلسل الفصل	اسم الموضوع	الرقم الصفحة
1	الفصل الأول	اللوغارتمات	7
2	الفصل الثاني	المتتابعات	29
3	الفصل الثالث	الدائرة	72
4	الفصل الرابع	الدوال الدائرية	99
5	الفصل الخامس	الغاية والاستمرارية	145

الأستاذ
وليد بكار

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

جدول يوضح رقم محاضرة اليوتيوب مع رقم الصفحة

رقم المحاضرة في اليوتيوب	رقم الصفحة
المحاضرة الأولى	-
المحاضرة الثانية	-
المحاضرة الثالثة	-
المحاضرة الرابعة	-
المحاضرة الخامسة	-
المحاضرة السادسة	-
المحاضرة السابعة	-
المحاضرة الثامنة	-

الدالة الأُسية ← $y = a^x$

الدالة اللوغارتمية: هي الدالة العكسية للدالة الأسية .

$x = \underset{a}{Log}\ y$ x يساوي لوغارتم y للاساس a

$a \neq 1$ $\quad\quad$ $\forall x \in R$

$a > 0$ (أكبر) $\quad\quad$ $y \in R^+$

* لكل عدد حقيقي موجب لوغارتم .
* لا يوجد لوغارتم للعدد السالب .

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

أولاً التحويل من الصيغة الأسية إلى الصيغة اللوغارتمية أو بالعكس

$$y = a^x \leftarrow x = \underset{a}{\text{Log}}\, y$$

$y \leftarrow$ العدد وحده

$a \leftarrow$ الأساس

$x \leftarrow$ الأس

توضيح

$$\underset{\text{الأساس}}{a}\ \underset{\text{العدد وحده}}{y}\ \underset{\text{الأس}}{x} \quad x = \underset{a}{\text{Log}}\, y$$

مثال 1 اكتب كلا مما يأتي بالصورة اللوغاراتمية:

1 $2 = 32^{\frac{1}{5}}$

$y = a^x$

كتابة صيغة الدالة اللوغارتمية (ثم نعوض هنا)

$x = \underset{a}{\text{Log}}\, y$

$\frac{1}{5} = \underset{32}{\text{Log}}\, 2$

2 $0.001 = 10^{-3}$

الأس	الأساس	العدد وحده
$x = -3$	$a = 10$	$y = 0.001$

نعوض هنا ← $x = \underset{a}{\text{Log}}\, (y)$

$-3 = \underset{10}{\text{Log}}\, (0.001)$

3 $5^3 = 125$

العدد وحده	$y = 125$
الأساس	$a = 5$
الأس	$x = 3$

نعوض هنا ← $x = \underset{a}{\text{Log}}\, (y)$

$3 = \underset{5}{\text{Log}}\, (125)$

مثال 2 اكتب كلا مما يأتي بالصورة الأسية:

1 $\underset{7}{\text{Log}}\, 49 = 2 \leftarrow \underset{a}{\text{Log}}\, y = x$ قارن

$y = a^x$

$49 = 7^2$

$y = 49$
$x = 2$
$a = 7$

2 $\underset{\sqrt{2}}{\text{Log}}\, 64 = 12 \leftarrow \underset{a}{\text{Log}}\, y = x$

$y = a^x$

$64 = (\sqrt{2})^{12}$

3 $\underset{a\ 10}{\text{Log}}\, 10000 = 4$

$y = a^x$

$10000 = 10^4$

أو نقارن

$\underset{a}{\text{Log}}\, y = x$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

أكتب الصورة الاخرى لكل مما يأتي :

1 $(0.01)^2 = 0.0001$ — من أُسّية إلى لوغارتمية

$$x = \underset{a}{\text{Log}}\ (y)$$

$$2 = \underset{0.01}{\text{Log}}\ (0.0001)$$

2 $\frac{7}{a}^{3^{x}} = 343^{y}$ — من أُسّية إلى لوغارتمية

$$x = \underset{a}{\text{Log}}\ (y)$$

$$3 = \underset{7}{\text{Log}}\ 343$$

3 $\underset{5}{\text{Log}}\ \left(\frac{1}{25}\right) = -2$ — من لوغارتمية إلى أُسّية

$$y = a^{x}$$

$$\frac{1}{25} = 5^{-2}$$

إضافي / أكتب الصورة الاخرى :

$2^3 = 8$
$y = a^x$

$$x = \underset{a}{\text{Log}}\ (y)$$

$$3 = \underset{2}{\text{Log}}\ (8)$$

ثانياً حل معادلة تحتوي على لوغارتم بالشكل

$$x = \underset{a}{\text{Log}}\ (y)$$

x أو a أو y ← مجهول

لكي نحل معادلة من الشكل $x = \underset{a}{\text{Log}}\ (y)$ نجعلها بالصيغة الأسية أولاً .

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

1 مثال حل المعادلة

1 $\text{Log}_{3}\ x = 4$

$y = a^x$

$x = 3^4$

$x = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$\boxed{x = 81}$

2 $\text{Log}_{x}\ 64 = 6$

* عندما يكون الاساس مجهول نساوي الأسس عن طريق التحليل .

$y = a^x$

$64 = x^6$

$2^6 = x^6$

* إذا تساوت الاسس تساوت الاساسات

$2^6 = x^6 \Rightarrow x = 2$

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1
2^6	

* عندما يكون الاس زوجي نأخذ قيم x باحتمالين $x = \mp 2$

3 $\text{Log}_{5}\ \frac{1}{125} = x$

$y = a^x$

$\frac{1}{125} = 5^x$ نساوي الاساسات

5	125
5	25
5	5
5^3	

$\frac{1}{5^3} = 5^x$

$5^{-3} = 5^x \Rightarrow \boxed{x = -3}$

الملاحظات

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

1 $\underset{a}{\overset{(x)}{\text{Log}}}\ \overset{(y)}{0.00001} = \chi$

* يجب تحويل الصيغة اللوغارتمية الى صيغة اسية .

$y = a^x$

$0.00001 = 10^x$

* نساوي الاساسات لأن الأس مجهول

$10^{-5} = 10^x$

$x = -5$

تذكير

$0.1 = 10^{-1}$ ← يمثل عدد المراتب على اليمين

$0.01 = 10^{-2}$

$0.001 = 10^{-3}$

$0.0001 = 10^{-4}$

$0.00001 = 10^{-5}$

2 $\underset{a}{\overset{(x)}{\text{Log}}}\ \overset{(y)}{16} = -4$

* يجب تحويلها الى الصيغة الأسية .

$y = a^x$

$16 = x^{-4}$

$2^4 = x^{-4}$

* يجب مساواة الأس لأن المجهول اساس

2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = x^{-4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ $\quad a \neq 1,\ a > 0$

3 $\underset{10}{\text{Log}}\ x = 5$

$y = a^x$

$x = 10^5$

$x = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

$x = 100\ 000$

ثالثاً خواص الدالة اللوغارتمية

1. $\underset{a}{\text{Log}}\ x + \underset{a}{\text{Log}}\ y = \underset{a}{\text{Log}}\ (x.y)$
2. $\underset{a}{\text{Log}}\ x - \underset{a}{\text{Log}}\ y = \underset{a}{\text{Log}}\ \left(\frac{x}{y}\right)$
3. $\underset{a}{\text{Log}}\ x^n = n\ \underset{a}{\text{Log}}\ x$ ← يبدأ بها الحل
4. $\underset{a}{\text{Log}}\ a = 1$ ← $\underset{2}{\text{Log}}\ 2 = 1$ ، $\underset{10}{\text{Log}}\ 10 = 1$ ، $\underset{7}{\text{Log}}\ 7 = 1$ ، $\underset{8}{\text{Log}}\ 8 = 1$
5. $\underset{a}{\text{Log}}\ 1 = 0$

تحذير هام جدا WARNING

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية ، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق ، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

تمارين

جد قيمة ما يأتي :

* كل عدد قبل اللوغارتم اصله اس

1 $\underset{10}{\text{Log}}\ \frac{40}{9} + 4\ \underset{10}{\text{Log}}\ 5 + 2\ \underset{10}{\text{Log}}\ 6$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ \frac{40}{9} + \underset{10}{\text{Log}}\ (5)^4 + \underset{10}{\text{Log}}\ (6)^2$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ \frac{40}{9} + \underset{10}{\text{Log}}\ 625 + \underset{10}{\text{Log}}\ 36$

خاصية رقم (3)

$= \underset{10}{\text{Log}}\left(\frac{40}{9} * 625 * \cancel{36}^{4}\right) = \underset{10}{\text{Log}}\ (40 * 625 * 4)$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ (100000 = \underset{10}{\text{Log}}\ 10^5$

$= 5\ \underset{10}{\text{Log}}\ 10$ خاصية رقم (4)

$= 5$

2 $2\ \underset{10}{\text{Log}}\ 8 + \underset{10}{\text{Log}}\ 125 - 3\ \underset{10}{\text{Log}}\ 20$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ (8)^2 + \underset{10}{\text{Log}}\ 125 - \underset{10}{\text{Log}}\ (20)^3$

$= (\underset{10}{\text{Log}}\ 64 + \underset{10}{\text{Log}}\ 125) - \underset{10}{\text{Log}}\ 8000$

خاصية رقم (3)

$= \underset{10}{\text{Log}}\ (64 * 125) - \underset{10}{\text{Log}}\ 8000$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ \frac{\cancel{8000}}{\cancel{8000}}$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ 1 = 0$ باستخدام خاصية رقم (5)

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

3 $\underset{a}{\text{Log}}\,(x^2-4)-\underline{2}\,\underset{a}{\text{Log}}\,(x-2)+\underset{a}{\text{Log}}\,(x-2)/(x+2)$

$=\left[\underset{a}{\text{Log}}\,(x^2-4)-\underset{a}{\text{Log}}\,(x-2)^2\right]+\underset{a}{\text{Log}}\,\dfrac{(x-2)}{(x+2)}$ استخدمنا خاصية رقم (3)

(يرجح قسمة) (بسط) (مقام)

$=\underset{a}{\text{Log}}\,\dfrac{(x^2-4)}{(x-2)^2}+\underset{a}{\text{Log}}\,\dfrac{(x-2)}{(x+2)}$ خاصية رقم (1)

(فرق بين مربعين) (يرجح ضرب)

$=\underset{a}{\text{Log}}\,\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-2)}\cdot\dfrac{(x-2)}{(x+2)}$

$=\underset{a}{\text{Log}}\,(1)=0$ خاصية رقم (5)

---

3 مثال اثبت ان :

$\underset{2}{\text{Log}}\,(17/5)-\underset{2}{\text{Log}}\,(34/45)+\underline{2}\,\underset{2}{\text{Log}}\,(2/3)=1$

$=\left[\underset{2}{\text{Log}}\left(\dfrac{17}{5}\right)-\underset{2}{\text{Log}}\left(\dfrac{34}{45}\right)\right]+\underset{2}{\text{Log}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

(قسمة) (بسط) (مقام)

$=\underset{2}{\text{Log}}\left[\dfrac{17}{5}\div\dfrac{34}{45}\right]+\underset{2}{\text{Log}}\left(\dfrac{4}{9}\right)$ (ضرب)

$=\underset{2}{\text{Log}}\,\dfrac{\cancel{9}}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{9}}$

$=\underset{2}{\text{Log}}\,2=1$ خاصية رقم (4)

$\dfrac{17}{5}\div\dfrac{34}{45}$

$\dfrac{\cancel{17}}{\cancel{5}_{1}}\times\dfrac{\overset{9}{\cancel{45}}}{\cancel{34}_{2}}$

القسمة تقلب الى ضرب بالكسر الذي يلي القسمة يقلب

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

اسئلة اضافية

سؤال 1 أوجد قيمة

$$\left[\operatorname{Log}_3 \frac{7}{15} + \operatorname{Log}_3 \frac{5}{28}\right] - \operatorname{Log}_3 \frac{3}{4}$$

* الحل مباشر لأن معامل log واحد .

$$= \left(\operatorname{Log}_3 \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{15}_{3}} \cdot \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{28}_{4}}\right) - \operatorname{Log}_3 \frac{3}{4}$$

$$= \operatorname{Log}_3 \frac{1}{12} - \operatorname{Log}_3 \frac{3}{4}$$

$$= \left(\operatorname{Log}_3 \frac{1}{12} \div \frac{3}{4}\right)$$

$$= \operatorname{Log}_3 \frac{1}{\cancel{12}_{3}} \times \frac{\cancel{4}^{1}}{3}$$

$$= \operatorname{Log}_3 \frac{1}{9} = \operatorname{Log}_3 \frac{1}{3^2} = \operatorname{Log}_3 3^{-2} = -2 \operatorname{Log}_3 3$$

$$= -2 \times 1 = -2$$

الطريقة الثانية

$$\left[\operatorname{Log}_3 \frac{7}{15} \oplus \operatorname{Log}_3 \frac{5}{28}\right] - \operatorname{Log}_3 \frac{3}{4}$$

$$= \operatorname{Log}_3 \left(\frac{7}{15} \times \frac{5}{28} \div \frac{3}{4}\right)$$

$$= \operatorname{Log}_3 \left(\frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{15}_{3}} \times \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{28}_{4}} \times \frac{\cancel{4}^{1}}{3}\right)$$

$$= \operatorname{Log}_3 \frac{1}{9} = \operatorname{Log}_3 \frac{1}{3^2}$$

$$= \operatorname{Log}_3 3^{-2}$$

$$= -2 \operatorname{Log}_3 3$$

$$= -2 \times 1 = -2$$

* كل اس يحول الى معامل وكل معامل يحول الى اس .

سؤال 2 جد قيمة

$$\overset{2}{\equiv} \operatorname{Log}_2 \frac{16}{15} + \overset{3}{\equiv} \operatorname{Log}_2 \frac{5}{2} - \operatorname{Log}_2 \frac{80}{9}$$

باستخدام خاصية رقم (3)

$$\operatorname{Log}_2 \left(\frac{16}{15}\right)^2 + \operatorname{Log}_2 \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \operatorname{Log}_2 \frac{80}{9}$$

$$\operatorname{Log}_2 \frac{256}{225} \overset{\text{ضرب}}{\oplus} \operatorname{Log}_2 \frac{125}{8} - \operatorname{Log}_2 \frac{80}{9}$$

$$\operatorname{Log}_2 \left(\frac{256}{225} \times \frac{125}{8} \div \frac{80}{9}\right)$$

$$\operatorname{Log}_2 \left(\frac{\cancel{256}^{\cancel{16}^{2}}}{\cancel{225}_{\cancel{9}_{1}}} \times \frac{\cancel{125}^{5}}{\cancel{8}_{1}} \times \frac{\cancel{9}^{1}}{\cancel{80}_{\cancel{16}_{1}}}\right)$$

$$\operatorname{Log}_2 2 = 1$$

توضيح الضرب والقسمة

$$\frac{\cancel{256}^{\cancel{16}^{2}}}{\cancel{225}_{\cancel{9}_{1}}} \times \frac{\cancel{125}^{5}}{\cancel{8}_{1}} \times \frac{\cancel{9}^{1}}{\cancel{80}_{\cancel{16}_{1}}}$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 3 أوجد قيمة

$$\log_{10}\frac{3}{64}-6\left[\frac{1}{3}\log_{10}\frac{5}{2}-\frac{1}{6}\log_{10}\frac{6}{45}\right]$$

ملاحظة في حالة وجود اقواس قبل اللوغارتم يجب التخلص منها ويجب توزيعها .

$$=\log_{10}\left(\frac{3}{64}\right)-2\log_{10}\left(\frac{5}{2}\right)+\log_{10}\left(\frac{6}{45}\right)$$

$$=\log_{10}\frac{3}{64}-\log_{10}\left(\frac{5}{2}\right)^2+\log_{10}\frac{6}{45}$$

$$=\log_{10}\frac{3}{64}-\log_{10}\frac{25}{4}+\log_{10}\frac{6}{45}$$

باستخدام خاصية رقم (3)

$$=\log_{10}\left(\frac{3}{64}\div\frac{25}{4}\right)\times\frac{6}{45}$$

* القسمة تقلب الى ضرب في الكسور .

$$=\log_{10}\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{64}^{16}_{8}}\times\frac{\cancel{4}^{1}}{25}\times\frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{45}^{15}_{5}}$$

$$=\log_{10}\frac{1}{1000}=\log_{10}\frac{1}{10^3}=\log_{10}10^{-3}=-3\log_{10}10=-3\times1$$

$$=-3$$

تحذير هام جدا!
WARNING

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية ، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق ، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.
لذا اقتضى التنويه والتحذير

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 4 اثبت ان :

$$\log_8 \frac{4}{3} - 2\left[\log_8 \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\log_8 \frac{1}{3}\right] = 2$$

$$= \log_8 \frac{4}{3} - 2\log_8 \left(\frac{3}{4}\right) - 3\log_8 \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \log_8 \frac{4}{3} - \log_8 \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \log_8 \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$= \log_8 \frac{4}{3} - \log_8 \frac{9}{16} - \log_8 \frac{1}{27}$$

$$= \log_8 \left(\frac{4}{3} \div \frac{9}{16} \div \frac{1}{27}\right)$$

$$= \log_8 \frac{4}{\cancel{3}_{1}} \times \frac{16}{\cancel{9}_{1}} \times \frac{\cancel{27}^{\,1}}{1}$$

$$= \log_8 64 = \log_8 8^2 = 2\log_8 8 = 2 \times 1$$

$$= 2$$

* الطرف الأيمن مساوي الطرف الأيسر .

ملاحظة لايمكن استخدام خواص اللوغاتمات بسبب اختلاف الاساس.

سؤال أحسب :

إثراني

$$\log_5 125 - \log_8 64 + \log_3 27$$

نلجأ إلى التحليل

$$= \log_5 125 - \log_8 64 + \log_3 27$$

$$= \log_5 5^3 - \log_8 8^2 + \log_3 3^3$$

$$= 3\log_5 5 - 2\log_8 8 + 3\log_3 3$$

$$= 3(1) - 2(1) + 3(1)$$

$$= 3 - 2 + 3 = 4$$

5^3

5	125
5	25
5	5
	1

5^2

8	64
8	8
	1

3^3

3	27
3	9
3	3
	1

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

رابعاً **إيجاد لوغارتم عدد بدلالة لوغارتم عدد اخر**

تمارين

سؤال 5 إذا كان: $\underset{10}{\text{Log}}\ 2 = 0.3010$

$\text{Log}3 = 0.4771$ جد قيمة كل مما يأتي:

$\underset{10}{\text{Log}}\ 0.002$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ (2\times10^{-3})$

$\log_a x + \log_a y = \log_a(x.y)$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ 2 + \underset{10}{\text{Log}}\ 10^{-3}$ حسب خاصية (1) الضرب يحول جمع

$= \underset{10}{\text{Log}}\ 2 + 3\ \underset{10}{\text{Log}}\ 10$ خاصية (4)

$= 0.3010 - 3$

$= 2.6990$

	2 9 9 10
	3.0000
	0.3010
	2.6990

2 $\underset{10}{\text{Log}}\ 2000$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ (2\times10^{3})$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ 2 + \underset{10}{\text{Log}}\ 10^{3}$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ 2 + 3\ \underset{10}{\text{Log}}\ 10$ $\quad \log 10 = 1$

$= 0.3010 + 3 = 3.3010$

3 $\underset{10}{\text{Log}}\ 12$

$\underset{10}{\text{Log}}\ (2\times2\times3)$

$\underset{10}{\text{Log}}\ 2 + \underset{10}{\text{Log}}\ 2 + \underset{10}{\text{Log}}\ 3$

$0.3010 + 0.3010 + 0.4771 = 1.0791$

1	
0.3010	
0.3010	
0.4771	
1.0791	

4 $\underset{10}{\text{Log}}\ 0.0003$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ (3\times10^{-4})$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ 3 + \underset{10}{\text{Log}}\ 10^{-4}$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ 3 - 4\ \underset{10}{\text{Log}}\ 10$ $\quad \log 10 = 1$ (من السؤال)

$= 0.4771 - 4 = -3.5229$

3	9 9 9 10
4.0000	
0.4771	
3.5229	

مراجعة

عدد الأصفار:
- $100 = 1\times10^{2}$
- $1000 = 1\times10^{3}$
- $10000 = 1\times10^{4}$
- $2000 = 2\times10^{3}$
- $40000 = 4\times10^{4}$
- $500 = 5\times10^{2}$
- $7000 = 7\times10^{3}$

فإذا كانت لدينا فارزة □.000 الأس سالب يمثل عدد المراتب

يمثل عدد المراتب:
- $0.001 = 1\times10^{-3}$
- $0.0001 = 1\times10^{-4}$
- $0.003 = 3\times10^{-3}$
- $0.00005 = 5\times10^{-5}$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال إذا كان

$\underset{10}{\text{Log}}\ 2 = 0.6989$ ، $\underset{10}{\text{Log}}\ 6 = 0.7781$

إضافي

1 $\underset{10}{\text{Log}}\ 30$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ (5 \times 6)$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ 5 + \underset{10}{\text{Log}}\ 6$

$= 0.6989 + 0.7781$

$= 1.4770$

```
  1 1 1 0
  0.6989
  0.7781 +
 ---------
  1.4770
```

5 $\underset{10}{\text{Log}}\ 18$

$= \underset{10}{\text{Log}}(3 \times 3 \times 2)$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ 3 + \underset{10}{\text{Log}}\ 3 + \underset{10}{\text{Log}}\ 2$

$= 0.4771 + 0.4771 + 0.3010$

$= 1.2552$

```
  0.4771
  0.4771
  0.3010 +
 ---------
  1.2552
```

2 $\underset{10}{\text{Log}}\ 0.05$

$= \underset{10}{\text{Log}}(5 \times 10^{-2})$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ 5 + \underset{10}{\text{Log}}\ 10^{-2}$

$= \underset{10}{\text{Log}}\ 5 - 2\ \underset{10}{\text{Log}}\ 10$

$= 0.6989 - 2 = 1.3011$

```
  1 9 9 10
  2.0000
  0.6989 -
 ---------
  1.3011
```

خامساً حل معادلة لوغارتمية

سؤال حل المعادلة الآتية :

$\underset{3}{\text{Log}}\ (2x - 1) + \underset{3}{\text{Log}}\ (x + 4) = \underset{3}{\text{Log}}\ 5$

مجموعة التعويض

$2x - 1 > 0$

$\frac{2x}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x > \frac{1}{2}}$

$x + 4 > 0 \Rightarrow \boxed{x > -4}$

$S = \left\{x : x \in R\ ,\ x > \frac{1}{2}\right\}$

$\underset{3}{\text{Log}}\ (2x - 1)(x + 4) = \underset{3}{\text{Log}}\ 5$

توزيع الأقواس $2x^2 + 8x - 1x - 4 = 5$

$2x^2 + 7x - 9 = 0$

$(2x + 9)(x - 1) = 0$

أما $2x + 9 = 0 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-9}{2}$

$x = \frac{-9}{2} \notin$ مجموعة التعويض ← يُهمل

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1} \in$ مجموعة التعويض

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

2 $\underset{2}{\text{Log}}\,(3x+5) \overset{\text{قسمة}}{-} \underset{2}{\text{Log}}\,(x-5)=3$

$\underset{a}{\text{Log}}_{2}\left(\frac{3x+5}{x-5}\right)^{y}=3^{x}$ تحول الى الصيغة الاسية

$y=a^{x}$ $\qquad \underset{a}{\text{Log}}=x$

$$\frac{3x+5}{x-5}=2^{3}$$

$$\frac{3x+5}{x-5} \times \frac{8}{1} \Rightarrow 8(x-5)=3x+5$$

$$8x-40=3x+5$$

$$8x-3x=5+40 \Rightarrow [5x=45] \div 5$$

$$\frac{5x}{5}=\frac{45}{5}$$

$x=9 \in$ مجموعة التعويض

مجموعة التعويض

$3x+5>0 \Rightarrow \frac{3x}{3}>\frac{-5}{3}$

$x>\frac{-5}{3}$

$x-5>0 \Rightarrow x>5$

$S=\{x : x \in R, x>5\}$

---

3 $\underset{a}{\text{Log}}\,6/5 \overset{\text{ضرب}}{+} \underset{a}{\text{Log}}\,5/66 \overset{\text{قسمة}}{-} \underset{a}{\text{Log}}\,132/121 \overset{\text{ضرب}}{+} \underset{a}{\text{Log}}\,12=x$

$$\underset{a}{\text{Log}}\left(\frac{6}{5} \overset{\text{ضرب}}{\times} \frac{5}{66} \overset{\text{قسمة}}{\div} \frac{132}{121} \overset{\text{ضرب}}{\times} \frac{12}{1}\right)=x$$

$$\underset{a}{\text{Log}}\left(\frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{66}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{121}}}{\cancel{132}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{12}}}{1}\right)=x$$

$\underset{a}{\text{Log}}\,1=x \Rightarrow \underset{a}{\text{Log}}\,1=0$

$x=0$

توضيح الاختصار

$$\frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{66}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{121}}}{\underset{1}{\cancel{132}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{12}}}{1}$$

$=1$

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

4 $\underset{10}{\text{Log}}\,(3x-7)+\underset{10}{\text{Log}}\,(3x+1)=1+\underset{10}{\text{Log}}\,2$

$\left[\underset{10}{\text{Log}}(3x-7)+\underset{10}{\text{Log}}\,(3x+1)\right]-\underset{10}{\text{Log}}\,2=1$

$\underset{10}{\text{Log}}\left[\dfrac{(3x-7).(3x+1)}{2}\right]=1$

$y=a^x$

$\dfrac{(3x-7)\,.\,(3x+1)}{2}=\dfrac{10^1}{1}$

$(3x-7)\,(3x+1)=20 \Rightarrow 9x^2+3x-21x-7=20$

$9x^2+3x-21x-7-20=0$

$\left[9x^2-18x-27=0\right]\div 9$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \longrightarrow$

مجموعة التعويض

$3x-7>0 \Rightarrow \dfrac{3x}{3}>\dfrac{7}{3}$

$\boxed{x>2\dfrac{1}{3}}$ أكبر

$3x+1>0 \Rightarrow \dfrac{3x}{3}>\dfrac{-1}{3}$

$\boxed{x>\dfrac{-1}{3}}$

$D=\left\{x:x\in R.x>2\dfrac{1}{3}\right\}$

أما $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ تُهمل

أو $x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$

5 $\underset{3}{\text{Log}}\,(x-2)+\underset{3}{\text{Log}}\,(x+1)=2+\underset{3}{\text{Log}}\,2$

$\left[\underset{3}{\text{Log}}\,(x-2)+\underset{3}{\text{Log}}\,(x+1)\right]-\underset{3}{\text{Log}}\,2=2$

استخدم خواص اللوغارتمات $\underset{a}{\text{Log}}\left[\dfrac{x}{y}\right]=\underset{3}{\text{Log}}\left[\dfrac{(x-2).(x+1)}{2}\right]=2$

$y=a^x$

$\dfrac{(x-2)(x+1)}{2}=3^2$

$\dfrac{(x-2)(x+1)}{2}=\dfrac{9}{1}$

$(x-2)(x+1)=18$

$x^2+x-2x-2-18=0$ (طرح، جمع)

$x^2-1x-20=0$

$(x+4)(x-5)=0 \longrightarrow$ ($+4x$، $-5x$، $-1x$)

مجموعة التعويض

$x-2>0 \Rightarrow x>2$

$x+1>0 \Rightarrow \boxed{x>-1}$

$D=\left\{x:x\in R\,,x>2\right\}$

مجموعة التعويض $\not\ni$ تُهمل

أما $x+4=0 \Rightarrow x=-4$

أو $x-5=0 \Rightarrow \boxed{x=5}$

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

6 $2\underset{4}{\text{Log}}\,x-\underset{4}{\text{Log}}\,(x+5)=2$

$2\underset{4}{\text{Log}}\,x-\underset{4}{\text{Log}}\,(x+5)=2$

$\underset{4}{\text{Log}}\,x^2-\underset{4}{\text{Log}}\,(x+5)=2$ ← يصبح قسمة

$\underset{a\,(4)}{\text{Log}}\left(\frac{x^2}{x+5}\right)^{y}=(2)^{x}$

$y=a^x$ تحوّل الى الصيغة الأسية

$\frac{x^2}{x+5}=4^2 \Rightarrow \frac{x^2}{x+5}=\frac{16}{1}$

$x^2=16\,(x+5) \Rightarrow x^2=16x+80$

$x^2-16x-80=0$

$(x-20)\,(x+4)=0$

(أما) $x-20=0 \Rightarrow \boxed{x=20}$

(أو) $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ يُهمل

مجموعة التعويض

$x>0\ ,\ x+5\neq 0$

$x>-5$

$D=\{x:x\in R\ ,\ x>0\}$

الملاحظات

Telegram : @SadsHelp

اللوغارتم العشري

$\text{Log}_{a}\, y = x$ (لوغارتم اعتيادي) $\quad a \neq 1,\ a > 0$

الرقم الذي تحت اللوغارتم لا يكتب يُسمى لوغارتم عشري

$\text{Log}_{10} 5 = \text{Log} 5$

$\text{Log}_{10} 4 = \text{Log} 4$

$\text{Log}_{10} 2 = \text{Log} 2$

* الأساس ان لم يكن موجودة تحت كلمة اللوغارتم (هذا الأساس 10)

اللوغارتم الطبيعي هو اللوغارتم الذي اساسه (e)

بالتقريب $e = 2.71828$

$Lny = x$ ← الأساس (e) لكن لا يكتب

أولاً: اللوغارتم العشري هو اللوغارتم الذي اساسه (10) وهذه العشرة لا تكتب (يعني كلما نرى لوغارتم بجانبه رقم ومليكينة اساسا معناها هذه الاساس عشرة).

ثانياً: الحاسبةالتي لدينا تعطينا لوغارتم الأرقام للأساس (10) ولا تعطينا لوغارتم اساسه يختلف عن العشرة.

ثالثاً: اللوغارتم الطبيعي هو اللوغارتم اساسه (e) وهذا الـ (e) هو عبارة عن رقم 2.71828.

$$Lny = x \Rightarrow y = e^{x}$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

الجزء الأول قاعدة تبديل الأساس.

أهمية القاعدة ⟸ إيجاد قيم Log لعدد معيناً إذا الأساس $\neq 10$

$$\text{Log}_a x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } a}$$

(بسط: Log x ، مقام: Log a)

(قاعدة تبديل الأساس)

$$\text{Log}_a x = \frac{\text{Ln}x}{\text{Ln}a}$$

أمثلة استعراضية

1. $\text{Log}_2 5 = \frac{\text{Log } 5}{\text{Log } 2}$ (يمكن استخراجه بالآلة الحاسبة لأن اساسه 10)

2. $\text{Log}_2 3 = \frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2}$

أمثلة محلولة

جد قيمة:

1. $\text{Log}_4 3 = \frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 4} = \frac{0.4771}{0.6020} = 0.7925$

2. $\text{Log}_3 15 = \frac{\text{Log } 15}{\text{Log } 3} = \frac{1.1760}{0.4771} = 2.4648$

3. $\text{Log}_5 16 - \text{Log}_5 2$ (عملية الطرح ترجع عملية قسمة)

$$= \text{Log}_5 \frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = \text{Log}_5 8$$

$$= \frac{\text{Log } 8}{\text{Log } 5} = 1.2920 \longrightarrow \text{يمكن ان يهمل}$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

ملاحظة لو كان السؤال بهذا الشكل:

$$\underset{5}{\text{Log } 16} - \underset{3}{\text{Log } 2}$$

غير متشابهة

لا يمكن ان نحول الطرح الى قسمة لأن الأساسات مختلفة .
من خواص الدالة اللوغارتمية ان عملية الطرح ترجح قسمة لكن بشرط .

الشرط : يجب ان تكون الاساسات متشابهة

$$\underset{5}{\text{Log } 16} - \underset{3}{\text{Log } 2}$$

$$\frac{\text{Log } 16}{\text{Log } 5} - \frac{\text{Log } 2}{\text{Log } 3}$$

$= \square - \square = \checkmark$

الجزء الثاني التطبيقات العملية

أولاً: إيجاد الرقم الهيدروجيني (PH) .

$$PH = -\text{Log}\left[H^+\right]$$

خطوات الحل

1. نكتب القانون اعلاه .
2. تعويض قيمة تركيز H بالقانون .
3. نستخدم خواص اللوغارتمات السابقة .

ملاحظة

$\text{Log } 10^n = n$

$\text{Log } 10 = 1$

$\text{Log } 10^2 = 2$

$\text{Log } 10^3 = 3$

$\text{Log } 10^4 = 4$

$\text{Log } 1000 = 3$

$\text{Log } 10000 = 4$

$\text{Log } 100000 = 5$ (نحسب الأصفار)

$\text{Log } 100 = 2$

$\text{Log } 10 = 1$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

مثال 1 أوجد الرقم الهيدروجيني لماء البحر إذا كان تركيز ايون الهيدروجين $[H]^+$ له حوالي $3.2*10^{-9}$.

$PH=?\ ,\ [H]^+=3.2*10^{-9}$

$PH=-\text{Log}\,[H]^+$ نكتب القانون

$PH=-\text{Log}\,(3.2*10^{-9})$ نعوض

$PH=-[\text{Log}\,3.2+\text{Log}^{-9}]$

$PH=-[\text{Log}\,3.2-9\text{Log}\,10]$

$PH=-[0.5051-9\,(1)]$ ← بأستخدام الحاسبة (0.5051)

$PH=-(-8.4949)=8.4949$

بدون أستخدام الحاسبة

علماً ان :

$\text{Log}\,3.2=0.5051$

مثال 2 تركيز ايون الهيدروجين $[H]^+$ في اللبن $2.5*10^{-7}$ جد الرقم الهيدروجيني له

$PH=?\ ,\ [H]^+=2.5*10^{-7}$

$PH=-\text{Log}\,[H]^+$

$PH=-\text{Log}\,(2.5*10^{-7})$ ضرب ← جمع

$PH=-[\text{Log}\,2.5+\text{Log}\,10^{-7}]$

$PH=-[\text{Log}\,2.5-7\text{Log}\,10]$

$PH=-(0.3979-7)$

$PH=-(-6.6021)$

$PH=6.6021$

إذا بدون حاسبة يعطي هذه المعلومة

علماً ان :

$\text{Log}\,2.5=0.3979$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

ثانياً: حساب سرعة الصاروخ .

$$S = -0.0098n + v.LnK$$

حيث:

S ← سرعة الصاروخ

n ← الزمن

V ← سرعة انطلاق البخار

K ← نسبة كتلته

مثال 1 استخدم صاروخ لدفع سفينة فضائية فإذا كانت نسبة كتلته (20) وسرعة انطلاق البخار 1.5 كم/ثا وزمن الاشتعال 100 ثا . جد سرعة الصاروخ .

$K = 20 \quad , \quad V = 1.5$ كم/ثا $\quad , \quad n = 100 \quad S = ?$

$S = -0.0098n + VLnK$

$S = (-0.0098 * 100) + (1.5 * Ln20)$

$S = -0.48 + (1.5 * 2.9957)$ ← من الحاسبة

$S = -0.98 + 4.49355$

$S = 3.51355$ كم/ثا

مثال 2 جد سرعة صاروخ نسبة كتلته نحو (10) وسرعة انطلاق بخاره قدره 3.5 كم/ثا وزمن اشتعال المحرك 50 ثا .

$S = ? \quad , \quad K = 10 \quad , \quad V = 3.5$ كم/ثا $\quad , \quad n = 50$ ثا

$S = -0.0098n + V.LnK$

$S = (-0.0098 * 50) + (3.5 * Ln10)$

$S = -0.49 + (3.5 * 2.3025)$ ← من الحاسبة

$S = -0.49 + 8.05875$

$S = 7.07875$ كم/ثا

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

ثالثاً: قانون حساب الفائدة المركبة:

$$R = m.e^{n.r}$$

m = المبلغ

r = الفائدة

n = عدد السنوات

مثال بفرض انك تستثمر (2) مليون دينار بفائدة مركبة سنوية مستمرة قدرها 2% أوجد جملة ماستحصل عليه بعد 10 سنوات.

$$m = 2000\ 000\ ,\ \frac{2}{100} = 0.02\ ,\ n = 10$$

$$R = m.e^{n.r}$$

$$R = 2000\ 000\ e^{10 * 0.02}$$

$$R = 2000\ 000\ e^{0.2}$$ نأخذ Ln الطرفين

$$LnR = Ln(2000\ 000\ e^{0.2})$$

$$LnR = Ln\ 2000\ 000 + Ln\ e^{0.2}$$

$$LnR = Ln2000\ 000 + 0.2\ \underbrace{Lne}_{=1}$$

$$LnR = 14.5086 + 0.2$$

$$LnR = 14.7086$$ نأخذ e الطرفين

$$e^{LnR} = e^{14.7086}$$

$$R = 2442908$$

تحذير هام جدا WARNING

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

2

MATHEMATIC

المُسند في الرياضيات

الاستاذ حيدر وليد

الخامس العلمي

الفصل الثاني

المتتابعات

ملازم دار المغرب
شبكة المساعد
077 100 55555
Mob: 6561

Telegram : @SadsHelp

المتتابعات

اعداد صحيحة موجبة

المتتابعة: هي دالة مجالها Z^+ تسمى متتابعة غير منتهية .

* هي مجموعة جزئية مرتبة ومنتهية تبدأ بالعدد (1) مثل $\{1 , 2 , 3 , ...n\}$

$$\langle 2 , 4 , 6 , ... \rangle$$

الحد العام هو قاعدة للمتابعة يمكن من خلالها ايجاد جميع حدود المتابعة .

$$\left(\begin{array}{c} U_n = n^2 \\ U_n = n^2 + 1 \\ U_n = (-1)^n \\ H_n = \dfrac{n}{2} \end{array} \right)$$

الحد العام

(حدود المتتابعة)

شكل المتتابعة $\langle 2 , 4 , 6 , 8 , 10 \rangle$ متتابعة منتهية

$\langle 5 , 10 , 15 ..... \rangle$ غير منتهية

الجزء الأول كيفية كتابة حدود المتتابعة من حدها العام .

سؤال 1 لتكن $n \in z^+$ حيث $f(n) = \dfrac{1}{n}$ اكتب المتتابعة :

$n = 1 , 2 , 3,4 , ...$

شرط

* n يجب يبدأ بالرقم واحد 1
* n يجب ان يكون متسلسل

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{2}$$

$$f(3) = \frac{1}{3}$$

$$f(4) = \frac{1}{4}$$

$$\langle 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , ... \rangle$$

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 2 أكتب الحدود الستة الأولى من المتتابعة:

$$f(n)=\begin{cases}4-n & n \text{ فردي}\\ n^2 & n \text{ زوجي}\end{cases}$$

$n=\underline{1}\ ,\ 2\ ,\ \underline{3}\ ,\ 4\ ,\ \underline{5}\ ,\ 6$ لأنه طلب 6 حدود

n فردي بالجزء الأعلى

n زوجي $n=2\ ,\ 4\ ,\ 6$		n فردي $n=1\ ,\ 3\ ,\ 5$	
$f(n)=n^2$		$f(n)=4-n$	
$f(2)=2^2=4$	الثاني	$f(1)=4-1=3$	الحد الأول
$f(4)=4^2=16$	الرابع	$f(3)=4-3=1$	الثالث
$f(6)=6^2=36$	السادس	$f(5)=4-5=-1$	الخامس

$\langle 3\ ,\ 4\ ,\ 1\ ,\ 16\ ,\ -1\ ,\ 36 \rangle$

سؤال 3 أكتب الحدود الستة للمتتابعة التي حدها العام:

$$Un=\begin{cases}2 & n \text{ فردي}\\ -\frac{n}{4} & n \text{ زوجي}\end{cases}$$

$n=\underline{1}\ ,\ 2\ ,\ \underline{3}\ ,\ 4\ ,\ \underline{5}\ ,\ 6$

ثابتة

$U_1=2$

$U_3=2$

$U_5=2$

$U_n=\frac{-n}{4}$

$U_{(2)}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$

$U_4=\frac{-4}{4}=-1$

$U_6=\frac{-\cancel{6}}{\cancel{4}}=\frac{-3}{2}$

$\langle 2\ ,\ \frac{-1}{2}\ ,\ 2\ ,\ -1\ ,\ 2\ ,\ \frac{-3}{2} \rangle$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

تمارين

سؤال 1 اكتب كلاً من المتتابعات الآتية مكتفياً بذكر الحدود الستة الأولى :

ستة حدود $n = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6$

1 $U_n = n^2 - 2n$

$U_{(1)} = (1)^2 - (1) = -1$

$U_{(2)} = (2)^2 - 2\ (2)$

$= 4 - 4 = 0$

$U_{(3)} = (3)^2 - 2\ (3)$

$= 9 - 6 = 3$

$U_{(4)} = (4)^2 - 2\ (4)$

$= 16 - 8 = 8$

$U_5 = (5)^2 - 2\ (5)$

$= 25 - 10 = 15$

$U_6 = (6)^2 - 2\ (6)$

$= 36 - 12 = 24$

$\langle -1 , 0 , 3 , 8 , 15 , 24 \rangle$

2 $U_n = 2$

$U_1 = 2$

$U_2 = 2$

$U_3 = 2$

$U_4 = 2$

$U_6 = 2$

$\langle 2 , 2 , 2 , 2 , 2 , 2 \rangle$

3 $U_n = \frac{6}{n}$

$U_1 = \frac{6}{1} = 6 \qquad n = 1$

$U_2 = \frac{6}{2} = 3 \qquad n = 2$

$U_3 = \frac{6}{3} = 2 \qquad n = 3$

$U_4 = \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{4}_{\,2}} = \frac{3}{2} \qquad n = 4$

$U_5 = \frac{6}{5} \qquad n = 5$

$U_6 = \frac{6}{6} = 1 \qquad n = 6$

$\langle 6 , 3 , 2 , \frac{3}{2} , \frac{6}{5} , 1 \rangle$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

4 $U_n = 1 - \frac{2}{n}$

$U_1 = 1 - \frac{2}{1}$

$= 1 - 2 = -1$

$U_2 = 1 - \frac{2}{2}$

$= 1 - 1 = 0$

$U_3 = \frac{1}{1} - \frac{2}{3}$ (توحيد مقامات)

$= \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$

$U_3 = 1 - \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$ (توحيد مقامات)

$= \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$

$U_5 = \frac{1}{1} - \frac{2}{5}$ (توحيد مقامات)

$\frac{5-2}{5} = \frac{3}{5}$

$U_6 = 1 - \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{6}}}$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$ (توحيد مقامات)

$= \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$

$\langle -1 , 0 , \frac{1}{3} , \frac{1}{2} , \frac{3}{5} , \frac{2}{3} \rangle$

5 $U_n = (-1)^n$

$U_1 = (-1)^1 = -1$

$U_2 = (-1)^2 = +1$

$U_3 = (-1)^3 = -1$

$U_4 = (-1)^4 = +1$

$U_5 = (-1)^5 = -1$

$U_6 = (-1)^6 = +1$

تذكير

$(-1)^n = \begin{cases} +1 & n \text{ وزجي} \\ -1 & n \text{ فردي} \end{cases}$

ملاحظة

الأس الزوجي يلغي السالب والأس الفردي يحتفظ بالسالب .

$\langle -1 , +1 , -1 , +1 , -1 , +1 \rangle$

6 $U_n = 2^{n-1}$

$U_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$

$U_2 = 2^{2-1} = 2^1 = 2$

$U_3 = 2^{3-1} = 2^2 = 4$

$U_4 = 2^{4-1} = 2^3 = 8$

$U_5 = 2^{5-1} = 2^4 = 16$

$U_6 = 2^{6-1} = 2^5 = 32$

$\langle 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 \rangle$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

7 $Un = \begin{cases} 1 & n \text{ فردية} \\ 2 & n \text{ زوجية} \end{cases}$

$n = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6$

n زوجي $n = 2 , 4 , 6$	n فردي $n = 1 , 3 , 5$
$U_n = 2$	$U_n = 1$
$U_2 = 2$	$U_1 = 1$
$U_4 = 2$	$U_3 = 1$
$U_6 = 2$	$U_5 = 1$

$\langle 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 \rangle$

سؤال 2 أكتب ثمانية حدود من المتتابعة بفرض:

$U : z^+ \Rightarrow U_n = \begin{cases} n+2 & n \text{ فردي} \\ \frac{4}{n} & n \text{ زوجي} \end{cases}$

n زوجي		n فردي
$U_n = \frac{4}{n}$		$U_n = n + 2$
$U_2 = \frac{4}{2} = 2$	الثاني	$U_1 = 1 + 2 = 3$ الحد الأول
$U_4 = \frac{4}{4} = 1$	الرابع	$U_3 = 3 + 2 = 5$ الثالث
$U_6 = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{2}{3}$	السادس	$U_5 = 5 + 2 = 7$ الخامس
$U_8 = \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{1}{2}$	الثامن	$U_7 = 7 + 2 = 9$ السابع

$\langle 3 , 2 , 5 , 1 , 7 , \frac{2}{3} , 9 , \frac{1}{2} \rangle$

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 3 في المتتابعة $< U_n >$ حيث $U_n = n^2 + 2n$ أثبت أن $U_{n+1} > U_n$.

$$U_{n+1} > U_n$$

$$U_{n+1} - U_n > 0$$

$$(n+1)^2 + 2(n+1) - (n^2 + 2n) > 0$$

$$n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 - n^2 - 2n > 0$$

$$2n + 3 > 0$$

$$n \in Z^+$$

$$n = 1 \rightarrow 2(1) + 3 > 0$$

$$5 > 0$$

$$n = 2 \rightarrow 2(1) + 3 > 0$$

$$7 > 0$$

الملاحظات

Telegram : @SadsHelp

المتتابعة الحسابية: هي المتتابعة التي يكون فيها حاصل طرح كل حد من الحد الذي قبله مقدار ثابت يسمى أساس المتتابعة $x(d)$.

$\langle 2, 4, 6, 8, \ldots \rangle$

$4-2=2$

$6-4=2 \Rightarrow$ اساس المتتابعة d $\boxed{d=+2}$

$8-6=2$

$\langle 1, 4, 7, 10, 13, \ldots \rangle$

$4-1=3$

$7-4=3$

$10-7=3$ اساس المتتابعة d $\boxed{d=+3}$

$13-10=3$

$\langle 6, 4, 2, 0, \ldots \rangle$

$4-6=-2$

$2-4=-2$ $\boxed{d=-2}$

$0-2=-2$

$\langle 3, 3, 3, 3, \ldots \rangle$

$3-3=0$

$3-3=0$ $\boxed{d=0}$

$3-3=0$

* $d>0$ ← $^{+}$متتابعة حسابية متزايدة
* $d<0$ ← $^{-}$متتابعة حسابية متناقصة
* $d=0$ ← متتابعة حسابية ثابتة (متتابعة ثابتة)

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

قانون الحد العام للمتتابعة الحسابية:

$$U_n = a + (n-1).\ d$$

d = أساس المتتابعة .

a = الحد الأول .

n = تسلسل الحد رتبه الحد .

U_n = مقدار الحد .

شرط

* n / لازم عدد صحيح موجب .

دائماً n نأخذها من الكلام .

الحد الخامس عشر $n=15$

الحد السابع $n=7$

الحد التاسع $n=9$

الحد العاشر $n=10$

$d = 12-8$

$d = 4$

$a = -4$

$\langle -4,\ 0,\ 4,\ 8,\ 12,\ \ldots \rangle$

$n = 4 \Downarrow$

الحد الرابع

$U_1 = 8$

$\langle 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \ldots \rangle$

$\Downarrow$

الحد الثالث

$n = 3$

$U_3 = 9$

* a نضيف الأساس إلى الحد الأول .

d

إضافة الـ d إلى a يعطي حدود المتتابعة .

سؤال 1 اكتب المتتابعة الحسابية التي حدها الأول $=7$ واساسها $=-3$

$a = 7 \qquad d = -3$

$7 + (-3) = 4$

$4 + (-3) = 1$

$1 + (-3) = -2$

$-2 + (-3) = -5$

$\langle 7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5,\ \ldots \rangle$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

تمارين

سؤال 2 أكتب الحدود الخمس الأولى لكل من المتتابعات الحسابية التي فيها:

1 $a = -5 \qquad d = {}^{+}3$

$-5+3=-2$

$-2+3=1$

$1+3=4$

$4+3=7$

$\langle -5 , -2 , 1 , 4 , 7 , \ldots \rangle$

2 $a = -20 , \ d = -4$

$-20+(-4)=-24$

$-24+(-4)=-28$

$-28+(-4)=-32$

$-32+(-4)=-36$

$\langle -20 , -24 , -28 , -32 , -36 , \ldots \rangle$

سؤال 3 أوجد الحد العاشر من المتتابعة الحسابية: $\langle 4 , 9 , 14 , \ldots \rangle$

$\boxed{a=4} , \ d=9-4 \Rightarrow \boxed{d=5}$

المطلوب

والمعطيات

$\boxed{n=10}$ ← من كلام السؤال

$U_{10}=?$

$U_n = a+(n-1) . d$ (? ✓ ✓ ✓)

$U_{10} = 4+(10-1) . 5$

$U_{10} = 4+(9) . (5)$

$U_{10} = 4+45$

$\boxed{U_0 = 49}$ الحد العاشر

تحذير هام جدا WARNING

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية ، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق ، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 4 جد الحد السابع عشر من المتتابعة الحسابية: $\langle -15 , -12 , -9 , \ldots \rangle$

$a = -15$

$d = -12 - (-15)$

$d = -12 + 15 = 3$

$n = 17$

$$U_n = a + (n-1).\ d$$

$$U_{17} = -15 + (17-1).\ 3$$

$$U_{17} = -15 + (16).\ (3)$$

$$U_{17} = -15 + 48$$

$$U_{17} = 33$$ الحد السابع عشر

سؤال 5 أكتب المتتابعة الحسابية التي حدها السابع = 36 وأساسها = 4

الحد السابع $= 36$

$U_7 = 36$ $\quad n = 7$ $\quad d = 4$

$U_n = a + (n-1).\ d$

$36 = a + (7-1).\ (4)$

$36 = a + (6).\ (4)$

$36 = a + 24$

$36 - 24 = a$

$a = 12$

$\langle 12 , 16 , 20 , 24 , 28 , \ldots \rangle$ (+4 +4 +4 +4)

عند كتابة المتتابعة نضيف الاساس (4) الى الحد الأول وهكذا...

$12 + 4 = 16$

$16 + 4 = 20$

$20 + 4 = 24$

$24 + 4 = 28$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 6 أوجد الحد الذي ترتيبه 200 في المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس =4− واساسها= 12

$d = 12 \ , \ U_5 = -4 \ , \ n = 5 \ , \ a = ?$

$U_n = a + (n-1)\ d$

$-4 = a + (5 - 1)(12)$

$-4 = a + 48$

$-4 - 48 = a \Rightarrow \boxed{a = -52}$

$n = 200 \ , \ a = -52 \ , \ d = 12 \ , \ U_{200} = ?$

* نجد الحد الذي ترتيبه 200

$U_n = a + (n-1)\ d$

$U_{200} = -52 + (200 - 1)(12)$

$U_{200} = -52 + 2388^{199}$

$U_{200} = 2336$

$U_{200} = a + (n-1)\ d$

سؤال 7 أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية $\langle -7 \ , \ -4 \ , \ -1 \ , \ \ldots\ldots 113 \rangle$

$\langle -7 \ , \ -4 \ , \ -1 \ , \ \ldots\ldots 115 \rangle$

a — un

* من يعطيني سؤال بهذه الصيغة راح نطلع شغلتين هي a , d

الحد الأخير

عدد الحدود تمثل (n)

$\Rightarrow [123 = 3n] \div 3$

* عندما يطلب عدد حدود المتتابعة يعني المطلوب ايجاده هو (n) و Un يمثل حد في المتتابعة .

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 8 إذا كان $\langle A , 7 , ... B , 25 \rangle$ متتابعة حسابية وكانت $B = 5A + 2$ فما قيمة A , B ؟ وما عدد حدود المتتابعة؟

$\langle \underset{d}{A} , \underset{d}{7} , ... B , \underset{d}{25} \rangle$

$7 - A = 25 - B$

$B = 25 - 7 + A$

$B = 18 + A$ ...(1) , $B = 5A + 2$ من السؤال نعوض في 1

$5A + 2 = 18 + A$

$5A - A = 18 - 2 \Rightarrow [4A = 16] \div 4$

$\frac{4A}{4} = \frac{16}{4} \Rightarrow A = 4$ نعوض A في العلاقة

$B = 5A + 2$

$B = 5(4) + 2 \Rightarrow B = 22$

$\langle 4 , 7 , ... , 22 , 25 \rangle$ عوضناها في السؤال

$a = 4 , n = ? , d = 3 , Un = 25$

$d = 3 , Un = 25$ ← الحد الأخير

$Un = a + (n-1)\, d$

$25 = 4 + (n-1).\, 3$

$25 - 4 = 3n - 3$

$21 + 3 = 3n \Rightarrow [24 = 3n] \div 3$

$\frac{24}{3} = \frac{3n}{3} \Rightarrow n = 8$

سؤال 9 $\langle x^2+1 , 2x^2+1 , 2x^2+x+3 , ... \rangle$ متتابعة حسابية / جد قيمة x/ وما حدها السابع؟

$\langle x^2+1 , \underset{(d)}{2x^2+1} , 2x^2+x+3 , ... \rangle$ (d فوق الفرق بين الحدين)

$(2x^2+1) - (x^2+1) = (2x^2+x+3) - (2x^2+1)$

$2x^2 - x^2 = 2x^2 + x + 3 - 2x^2 - 1$

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$ ← تجربة

$(x+1)(x-2) = 0$

أما $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

أو $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

تحذير هام جدا WARNING

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية ، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق ، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

أولاً: المتتابعة الأولى

عندما $x=-1$

$\langle x^2+1\ ,\ 2x^2+1\ ,\ 2x^2+x+3\ ,\ \ldots.\rangle$

$x^2+1 \Rightarrow (-1)^2+1=2$

$2x^2+1 \Rightarrow 2(-1)^2+1=3$

$2x^2+x+3 \Rightarrow 2(-1)^2+(-1)+3$

$2-1+3=4$

$\langle 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ \ldots.\rangle$

$a=2\ ,\ d=1\ ,\ n=7\ ,\ U_7=?$

$U_n=a+(n-1)\,d$

$U_7=2+(7-1)(1)$

$U_7=2+6$

$U_7=8$

ثانياً: المتتابعة الثانية

عندما $x=2$

$x^2+1 \Rightarrow 2^2+1=5$

$2x^2+1 \Rightarrow 2(2)^2+1=9$

$2x^2+x+3 \Rightarrow 2(2)^2+2+3$

$8+2+3=13$

$\langle 5\ ,\ 9\ ,\ 13\ ,\ \ldots.\rangle$

$a=5\ ,\ d=4\ ,\ n=7\ ,\ U_7=?$

$U_n=a+(n-1)\,d$

$U_7=5+(7-1)(4)$

$U_7=5+24$

$U_7=29$

* إذا أعطى في السؤال حدين للمتتابعة يكون الحل بمعادلتين آنياً تستخرج من القانون العام .

الحد السابع $= U_n$ ← معادلة

الحد العاشر $= U_n$ ← معادلة

الطرح ← الحذف

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 10 جد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس =8 وحدها الثامن عشر =31−

$n=5$ (يكون التعويض فقط في U_n و n)

$U_5=8$

$U_n=a+(n-1)\,d$

$8=a+(5-1)\,d \Rightarrow \boxed{a+4d=8}$ ..... (1)

* حدها الثامن عشر = -31 / U / n

$n=18$

$U_{18}=-31$

$U_n=a+(n-1)\,d$

$-31=a+(18-1)\,d$

$\boxed{a+17d=-31}$ .... (2)

$a+4d=8$ .... (1)

$+a \mp 17d=\pm 31$ .... (2)

$[-13d=39]\div -13$

بالضرب

$\frac{-13d}{-13}=\frac{39}{-13}$

$\boxed{d=-3}$ نعوض قيمة (d)

$a+4d=8$

$a+4(-3)=8$

$a-12=8$

$a=8+12$

$\boxed{a=20}$

$\langle 20\ ,\ 17\ ,\ 14\ ,\ 11\ ,\ ....\rangle$

سؤال 11 متتابعة حسابية حدها الثالث=9 وحدها السابع=3− أوجد حدود المتتابعة.

* حدها الثالث = 9

$n=3\ ,\ U_3=9$

$U_n=a+(n-1)\,d$

$9=a+(3-1)\,d$

$\boxed{a+2d=9}$ .... (1)

* حدها السابع = -3 / U_n / n

$n=7\ ,\ U_7=-3$

$-3=a+(7-1)\,d$

$\boxed{a+6d=-3}$ .... (2)

$a+2d=9$ .... (1)

$\mp a \mp 6d=\pm 3$ .... (2)

انتبه للاشارة

$[-4d=12]\div -4$

$\frac{-4d}{-4}=\frac{12}{-4} \Rightarrow \boxed{d=-3}$ نعوض في معادلة (1)

$a+2d=9$

$a+2(-3)=9$

$a-6=9 \Rightarrow a=9+6$

$\boxed{a=15}$

$\langle 15\ ,\ 12\ ,\ 9\ ,\ 6\ ,\ ....\rangle$

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 12 أي حد في المتتابعة الحسابية $\langle \ldots, -1, -5, -9 \rangle$ يكون مساوياً 87 وهل يوجد حد في هذه المتتابعة = 333 ؟

$\langle -9, -5, -1, \ldots \rangle$

$a = -9$, $d = -5 - (-9)$

$d = -5 + 9 \Rightarrow d = 4$, $U_n = 87$, $n = ?$

$U_n = a + (n-1)\,d$

$87 = -9 + (n-1)(4)$

$87 + 9 = 4n - 4$

$96 + 4 = 4n \Rightarrow [100 = 25] \div 4$

$\frac{100}{4} = \frac{4n}{4} \Rightarrow n = 25$

$U_n = 333$, $n = ?$, $a = -9$, $d = 4$

ملاحظة

n ← معناها المطلوب

* عدد حدود المتتابعة ← n

* أي حد في المتتابعة ← n

n ← معناها المطلوب

$U_n = a + (n-1)\,d$

$333 = -9 + (n-1)(4)$

$333 + 9 = 4n - 4$

$333 + 9 + 4 = 4n \Rightarrow [346 = 4n] \div 4$

$\frac{346}{4} = \frac{4n}{4}$

$n = \frac{346}{4}$ عدد غير صحيح

n- يجب ان يكون عدد صحيح موجب

لا يوجد حد مقداره 333

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

الأوساط الحسابية

لحل مسائل الأوساط الحسابية نتبع الخطوات الآتية :

أولاً : نجد a و Un والمعطيات في السؤال .

ثانياً: نجد n من القانون . $n = \text{عدد الأوساط} + 2$

ثالثاً: نطبق القانون .

$$U_n = a + (n-1)\,d$$

U_n من السؤال ، a من القانون اعلاه ، d مجهول

ونجد d ثم نجد المتتابعة

$\langle \quad \rangle$

سؤال 13 إذا ادخلنا ستة اوساط حسابية بين 2 ، 30 فما هذه الاوساط؟

2 ← a ، 30 ← Un

أولاً $a = 2 \ , \ U_n = 30$

ثانياً $n = \text{عدد الاوساط} + 2$

$n = 6 + 2 \Rightarrow \boxed{n = 8}$

ثالثاً $U_n = a + (n-1)\,d$

$30 = 2 + (8-1)\,d$

$30 - 2 = 7d \Rightarrow [28 = 7d] \div 7$

$\frac{28}{7} = \frac{7d}{7} \Rightarrow \boxed{d = 4}$

$\langle 2 , 6 , 10 , 14 , 18 , 22 , 26 , 30 \rangle$

الاوساط الحسابية

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 14 ادخل ستة اواسط حسابية بين 38 ، 10 ؟

38 ← Un ، 10 ← a

أولاً $a = 10 \ , \ U_n = 38$

ثانياً

$n =$ عدد الاوساط $+ 2$

$n = 6 + 2 \Rightarrow \boxed{n = 8}$

ثالثاً $U_n = a + (n-1)\, d$

$38 = 10 + (8-1)\, d$

$38 - 10 = 7d \Rightarrow [28 = 7d] \div 7$

$\frac{28}{7} = \frac{7d}{7} \Rightarrow \boxed{d = 4}$

$\langle 10 , \boxed{14 , 18 , 22 , 26 , 30 , 34} , 38 \rangle$

توضيح

$10 + 4 = 14$

$14 + 4 = 18$

$18 + 4 = 22$

$22 + 4 = 26$

$26 + 4 = 30$

$30 + 4 = 34$

$34 + 4 = 38$

* عندما نجد الـ d نقوم بجمع a مع d ثم نجمع الناتج مع d مرة اخرى .

تحذير هام جدا WARNING

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية ، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق ، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

Telegram : @SadsHelp

سؤال 15 متتابعة حسابية حدها الرابع =1- وحاصل ضرب حديها الثاني والثالث =10 فما حدها العاشر ؟

حدها الرابع $\Leftarrow$ $a+3d=-1$

ينقص عنه مقدار واحد

توضيح فقط

a ← الحد الأول

$a+d$ ← الحد الثاني

$a+2d$ ← الحد الثالث

$a+3d$ ← الحد الرابع

$a+4d$ ← الحد الخامس

⋮

$a+9d$ ← الحد العاشر

$$a+3d=-1 \quad \ldots (1)$$

$$(a+d)(a+2d)=10$$

$$a^2+2ad+ad+2d^2=10$$

$$a^2+3ad+2d^2=10 \quad \ldots (2)$$

$$a+3d=-1$$

$a=-1-3d$ تُعوض في معادلة (2)

$$a^2+3ad+2d^2=10$$

$$(-1-3d)^2+3d\,(-1-3d)+2d^2-10=0$$

مربع حدانية — توزيع

$$1+6d+9d^2-3d-9d^2+2d^2-10=0$$

مال التربيع — مال التوزيع — نفسه

$2d^2+3d-9=0$ تجربة

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

$$2d^2 + 3d - 9 = 0$$

$$(2d - 3)(d + 3) = 0$$

أما $2d - 3 = 0$

$$2d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{2}$$

أو $d + 3 = 0$

$$\boxed{d = -3}$$ تُعوض في معادلة (1)

$$a = -1 - 3d$$

$$a = -1 - 3\ (-3)$$

$$a = -1 + 9 \Rightarrow \boxed{a = 8}$$

$$U_n = a + (n - 1)\ d$$

$$U_{10} = 8 + (10 - 1)(-3)$$

$$U_{10} = 8 - 27$$

$$\boxed{U_{10} = -19}$$

الملاحظات

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

مجموع حدود متتابعة حسابية

جد مجموع ثلاثة حدود من المتتابعة الحسابية $\langle 2 , 4 , 6 , ... \rangle$

$2+4+6=12$

$S_n = \frac{n}{2}(a+U_n)$ ⇒ يستخدم عندما يكون الحد الأخير معلوم

مثلاً: $\langle \underset{a}{2} , 4 , 6 , ... \underset{Un}{100} \rangle$

$S_n = \frac{n}{2}\ 2a+(n-1)\ d$

يستخدم عندما تكون المتتابعة غير منتهية (الحد الأخير مجهول).

مثل: $\langle 2 , 4 , 6 , ... \rangle$

$a =$ الحد الأول

$U_n =$ الحد الأخير

$n =$ عدد الحد المطلوب إيجاد ومجموعها

$S_n =$ المجموع

توضيح

مثلاً/ جد مجموع عشر حدود

$n = 10$

جد مجموع الحدود السبعة الأولى

$n = 7$

سؤال 16 أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية $\langle 1 , 2 , 3 , ... \underset{Un}{100} \rangle$

$a = 1 , U_n = 100 , n = 100$

$S_n = \frac{n}{2}[a + U_n]$

$S_{100} = \frac{100}{2}[1+100]$

$S_{100} = 50\ (101) = 5050$

تحذير هام جدا WARNING

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

نسخة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 17 أوجد مجموع ثمان حدود من

المتتابعة الحسابية $\langle -4 , 1 , 6 , ... \rangle$

$\langle -4 , 1 , 6 , ... \rangle$

$a = -4$, $d = 6 - 1 \Rightarrow d = 5$, $n = 8$

$$S_n = \frac{n}{2} \left[2a + (n-1)d \right]$$

$$S_8 = \frac{8}{2} \left[2(-4) + (8-1)(5) \right]$$

$$S_8 = 4 \left[-8 + 35 \right]$$

$$S_8 = 4 \ (27)$$

$$S_8 = 108$$

سؤال 18 جد عدد حدود المتتابعة

$\langle -20 , -17 , -14 , ... 55 \rangle$ ثم جد مجموعها .

* عند يطلب عدد الحدود معناها يطلب (n)

$\langle -20 , -17 , -14 , ... 55 \rangle$

$a = -20$, $U_n = 55$

$d = -17 - (-20)$

$d = -17 + 20 \Rightarrow d = 3$

$U_n = a + (n-1)\, d$

$55 = -20 + (n-1)(3)$

$55 = -20 + (n-1)(3)$

$55 + 20 = 3n - 3$

$55 + 20 + 3 = 3n \Rightarrow \left[78 = 3n \right] \div 3$

$$\frac{78}{3} = \frac{3n}{3}$$

$n = 26$ عدد حدود المتتابعة 26 حداً

ثم جد مجموعهما ⇐ مجموع 26 حد

$S_n = \frac{n}{2} (a + U_n)$ لأن الحد الأخير معلوم نستخدم هذا لقانون

$$S_{26} = \frac{26}{2} (-20 + 55)$$

$$S_{26} = 13 \ (35)$$

$S_{26} = 455$

إنتبه

صيغة ثانية ← ثم جد مجموع عشرة حدود

$n = 10$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 19 كم حد يؤخذ من المتتابعة الحسابية $\langle \ldots , 17 , 21 , 25 \rangle$ ابتداءاً من الحد الأول ليكون مجموعها $=-14$

$\langle 25 , 21 , 17 , \ldots \rangle$ $\begin{matrix} a = 25 \\ d = 21 - 25 \end{matrix}$ ، $S_n = -14$

$d = 4$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$-14 = \frac{n}{2}\left[2\,(25) + (n-1)(-4)\right]$$

$$-14 = \frac{n}{2}\,(50 - 4n + 4)$$

$$\left[-14 = \frac{n}{2}(54 - 4n)\right] \times 2$$

$$-28 = \frac{n}{2}(54 - 4n) * 2$$

$$-28 = n(54 - 4n)$$

$$-28 = 54n - 4n^2$$

$$4n^2 - 54n - 28 = 0 \qquad \text{تجربة}$$

$$(n - 14)(4n + 2) = 0$$

أما $n - 14 = 0 \Rightarrow \boxed{n = 14}$

أو $4n + 2 = 0 \Rightarrow \left[4n = -2\right] \div 4$

$$\frac{4n}{4} = \frac{-2}{4} \Rightarrow n = \frac{-1}{2}$$ يُهمل

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 20 جد مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين 400 , 100 وتقبل القسمة على 3 .

$\langle 102 , 105 , 108 , ... 399 \rangle$

$a = 102 \ , \ d = 3 \ , \ U_n = 399$

$U_n = a + (n-1)\, d$

$399 = 102 + (n-1)(3)$

$399 - 102 = 3n - 3$

$399 - 102 + 3 = 3n \Rightarrow \left[300 = 3n\right] \div 3$

$\frac{300}{3} = \frac{3n}{3}$

$\boxed{n = 100}$

$S_n = \frac{n}{2}\left[a + U_n\right]$

$S_{100} = \frac{100}{2}\left[102 + 399\right]$

$S_{100} = 50\ (501) \Rightarrow$

$\boxed{S_{100} = 25050}$

صيغة الثانية: كم عدد محصور بين 400 و 100 يقبل القسمة على 3 بدون باقي

سؤال 21 ثلاث اعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها =15 ومجموع مربعاتها=83 فما هي الأعداد؟

$a - d \ , \ a \ , \ a + d$

$(a - d) + a + (a + d) = 15 \Rightarrow \left[3a = 15\right] \div 3$

$\frac{3a}{3} = \frac{15}{3}$

$\boxed{a = 5}$ نُعوض بدال كل a اعلاه

$5 - d \ , \ 5 \ , \ 5 + d$

$(5-d)^2 + (5)^2 + (5+d)^2 = 83$

فتح التربيع

$25 - 10d + d^2 + 25 + 25 + 10d + d^2 = 82$

$2d^2 + 75 = 83$ جمع وطرح

$2d^2 = 83 - 75$ معلوم مجهول $\Rightarrow \left[3d^2 = 8\right] \div 2$

$\frac{2d^2}{2} = \frac{8}{2}$

$d^2 = 4$ بالجذر

$\boxed{d = \mp 2}$

Telegram : @SadsHelp

المتتابعة الهندسية

هي المتتابعة التي يكون فيها حاصل قسمة كل حد على الحد الذي قبله يساوي مقداراً ثابتاً يسمى اساس المتتابعة ← يُرمز له (r) .

* وهي المتتابعة التي لا يوجد فيها حد = "صفر"

$\langle 2, 4, 8, \ldots \rangle$

$\frac{4}{2} = 2$

$\frac{8}{4} = 2 \Rightarrow r = 2$ "اساس المتتابعة"

$\langle 1, 2, 4, 8, \ldots \rangle$ $U_4 = 8$

$\frac{2}{1} = 2$

$\frac{4}{2} = 2 \Rightarrow r = 2$

$\frac{8}{4} = 2$

$\langle 4, 4, 4, \ldots \rangle$

$r = 1$ تُسمى متتابعة ثابتة

قانون الحد العام للمتتابعة الهندسية

$$U_n = a.r^{n-1}$$

a = الحد الأول

r = اساس المتتابعة الهندسية

n = الحد - شامل الحد ← تسلسل الحد

U_n = مقدار الحد

* متتابعة هندسية حدها السابع U_n = 64

$n = 7$

$U_7 = 64$

* لكتابة متتابعة هندسية نقوم بضرب الحد الأول × الأساس وهكذا . . . .

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 1 أكتب الحدود الستة الأولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الأول = 64 واساسها = $\frac{-1}{2}$

$$a = 64 \ , \ r = \frac{-1}{2}$$

$$\overset{32}{\cancel{64}} \times \frac{-1}{\cancel{2}_{1}} = -32$$

$$-\overset{16}{\cancel{32}} \times \frac{-1}{\cancel{2}_{1}} = 16$$

$$-\overset{8}{\cancel{16}} \times \frac{-1}{\cancel{2}_{1}} = -8$$

$$-\overset{4}{\cancel{8}} \times \frac{-1}{\cancel{2}_{1}} = 4$$

$$-\overset{2}{\cancel{4}} \times \frac{-1}{\cancel{2}_{1}} = -2$$

* الحد الأول ونضربه بالاساس ثم نضرب الناتج بالاساس وهكذا كل ناتج يُضرب بالأساس.

$$\langle 64 \ , \ -32 \ , \ 16 \ , \ -8 \ , \ 4 \ , \ -2 \ , \ \ldots \rangle$$

سؤال 2 جد الحد السابع من متتابعة هندسية حدها الأول = $\frac{-1}{4}$ واساسها = 2

$$a = \frac{-1}{4} \ , \ r = 2 \ , \ n = 7 \ , \ U_7 = ?$$

كتابة القانون $U_n = a.r^{n-1}$

التعويض $U_7 = (\frac{-1}{4}).(2)^{7-1}$

$$U_7 = \frac{-1}{4}.(2)^6 \rightarrow 2\times2\times2\times2\times2\times2 = 64$$

ناتج

$$U_7 = \frac{-1}{\cancel{4}_{1}}.(\overset{16}{\cancel{64}})$$

$$U_7 = -16$$

إنتبه !

* ممنوع اختصار بسط ومقام واحد من عندهم مرفوع للأس (ممنوع ...)

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 3 جد الحد الثامن من المتتابعة الهندسية $\left\langle 2 , 1 , \frac{1}{2} , ... \right\rangle$

$n = 8 , a = 2 , r = \frac{1}{2} , U_8 = ?$

* عندما يعطي متتابعة نجد منها الحد الأول (a) والأساس (r)

$U_n = a.r^{n-1}$ كتابة قانون

$U_8 = (2).(\frac{1}{2})^{8-1}$ تعويض

$U_8 = 2.(\frac{1}{2})^7 = 2\ (\frac{1^7}{2^7})$

$U_8 = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{128}_{64}}$

$U_8 = \frac{1}{64}$

الملاحظات

@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 4 متتابعة هندسية حدها الأول =3 وحدها الخامس = 48 جد حدها الثامن .

$n = 8$ ، $U_8 = ?$

$a = 3$

$n = 5$ ، $U_5 = 48$ ← حدها الخامس = 48

رتبة الحد: حدها الخامس ، $n = 5$

مقدار الحد: $48 = U_5$

$U_n = a.r^{n-1}$

$48 = 3\ (r)^{5-1}$

$[48 = 3r^4] \div 3$

$16 = r^4$ بالجذر الرابع

$r = \sqrt[4]{16} \Rightarrow \boxed{r = \mp 2}$

تذكير:
الدليل الفردي للجذر يحمل قيمة واحدة اما موجب او سالب .
الدليل الزوجي للجذر يحمل قيمتين سالبة و موجبة

عندما $r = 2$

$U_n = a.r^{n-1}$

$U_8 = 3\ (2)^{8-1}$

$U_8 = 3\ (2)^7$

$U_8 = 3\ (128) \Rightarrow \boxed{U_8 = 384}$

1 2 8
× 3
3 8 4

عندما $r = -2$

$U_8 = 3\ (-2)^7$

$U_8 = 3\ (-128) \Rightarrow \boxed{U_8 = -384}$

أساسيات

* كل سالب مع الأس الفردي يبقى .
* كل سالب مع الأس الزوجي يصبح موجب .

$(-2)^7 = -128$

$(-2)^6 = +64$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

ملاحظة

(r°) a ⇒ الحد الأول

ar ⇒ الحد الثاني

ar^{2} ⇒ الحد الثالث

ar^{3} ⇒ الحد الرابع

ar^{4} ⇒ الحد الخامس

ar^{5} ⇒ الحد السادس

⋮

ar^{14} ⇒ الحد الخامس عشر

دائماً أس (r) يقل مقدار واحد عن الحد

* عندما يعطي حدين الحل بمعادلتين آنياً "بالقسمة"

سؤال 5 متتابعة هندسية حدها الرابع $=-8$ وحدها السابع $=-64$ فما حدها الأول وما أساسها؟

$ar^{3} = -8$ ⇐ حدها الرابع

$ar^{6} = -64$ ⇐ حدها السابع

$ar^{3} = -8 \ldots (1)$

$ar^{6} = -64 \ldots (2)$

بقسمة (2) على (1)

$$\frac{②}{①} \quad \frac{ar^{6}}{ar^{3}} = \frac{-64}{-8}$$

$r^{3} = 8$ بالجذر التكعيبي

$r = \sqrt[3]{8} \Rightarrow \boxed{r = 2}$

* عندما يكون دليل الجذر فردي يوجد قيمة واحد للناتج

$ar^{3} = -8$ نعوض في معادلة رقم (1)

$a\,(2)^{3} = -8 \Rightarrow [8a = -8] \div 8$

$\boxed{a = -1}$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 6 مجموع الحدود الثلاثة الأولى من متتابعة هندسية حدودها موجبة =7 وحدها الثالث = 1 فما حدها السادس؟

الحد الأول + الحد الثاني + الحد الثالث = 7

$a + ar^1 + ar^2 = 7$

$a\,(1+r+r^2)=7$ .... (1) سحب a عامل مشترك

$U_3 = ar^2 \Rightarrow \frac{a\,r^2}{r^2} = \frac{1}{r^2} \Rightarrow a = \frac{1}{r^2}$ .... (2)

$\left[r^2 \cdot \frac{1}{r^2}(1+r+r^2) = 7.r^2\right] * r^2$

$1+r+r^2 = 7r^2$

$7r^2 - r^2 - r - 1 = 0$

$6r^2 - r - 1 = 0$

$(3r+1)(2r-1)=0$

أما $3r+1=0 \Rightarrow \frac{3r}{3} = \frac{-1}{3} \Rightarrow r = \frac{-1}{3}$ يُهمل

$2r-1=0$

$\frac{2r}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}}$ ← تقلب القسمة الى ضرب

$a = 1 \times 4 \Rightarrow a = 4$

$U_n = ar^{n-1}$

$U_6 = 4 \times (\frac{1}{2})^5$

$U_6 = \cancel{4}^{1} \times \frac{1}{\cancel{32}_{8}}$

$U_6 = \frac{1}{8}$

توضيح

الحد الثالث $= ar^2$

$\left[1 = ar^2\right] \div r^2$

$a = \frac{1}{r^2}$ .... (2)

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 7 مجموع الحدين الأول والثاني من متتابعة هندسية =(−32) ومجموع حديها الرابع والخامس =(−4) فما حدها السابع؟

عامل مشترك (a)

الحد الأول + الحد الثاني = −32

$a + ar = -32$

$a\,(1+r) = -32 \ldots (1)$

الحد الخامس + الحد الرابع = −4

$ar^4 + ar^3 = -4$

عامل مشترك (ar^3)

$ar^3\,(1+r) = -4 \ldots (2)$

بقسمة (1) على (2)

$$\frac{a\,(1+r)}{ar^3\,(1+r)} = \frac{-32}{-4} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

بالجذر التربيعي

$$\frac{1}{r^3} = 8 \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Rightarrow \boxed{r = \frac{1}{2}}$$

نعوض قيمة (r) في معادلة رقم (1)

$$a\,(1+r) = -32$$

$$a\,(1+\tfrac{1}{2}) = -32$$

$$\left[\frac{3}{2}\,a = -32\right] \times 2 \Rightarrow [3a = -64] \div 3$$

$$\frac{3a}{3} = \frac{-64}{3}$$

$$\boxed{a = \frac{-64}{3}}$$

$$a = \frac{-64}{3}$$

$$U_n = ar^{n-1}$$

$$U_7 = \left(\frac{-64}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(7-1)=6}$$

$$U_7 = \frac{-64}{3} \cdot \frac{1}{64}$$

$$\boxed{U_7 = \frac{-1}{3}}$$

توضيح

توحيد مقامات:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

الحد السابع $n = 7$

$$a = \frac{-64}{3}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

الأوساط الهندسية

1 نحدد a , Un من السؤال .

$U_n \rightarrow \square$, $\square \leftarrow a$

2 نجد (n) ← عدد الأوساط + 2 = n

3 نطبق قانون المتتابعة الهندسية .

$U_n = a.r^{n-1}$ لنجد (r)

4 نجد الأواسط

$a \times r = \square$

$\square \times r = \checkmark$

$\checkmark \times r = \checkmark\checkmark$

سؤال 1 أدخل اربعة اوساط هندسية بين العددين 4 , 128

عدد الأوساط =4

128 , 4

a ← U_n

$n =$ عدد الأوساط $+2$

$n = 4+2 \Rightarrow \boxed{n=6}$

$\boxed{a=128}$, $\boxed{U_n = 4}$

U_n

$Un = ar^{n-1} \Rightarrow 4 = 128\ (r)^{6-1}$

$\left[4 = 128r^5\right] \div 128 \Rightarrow r^5 = \frac{4}{128}$

$r^5 = \frac{1}{32}$ بالجذر الخامس

$\boxed{r = \frac{1}{2}}$

$128 \times \frac{1}{2} = 64$

$64 \times \frac{1}{2} = 32$

$32 \times \frac{1}{2} = 16$

$16 \times \frac{1}{2} = 8$

$8 \times \frac{1}{2} = 4$

$\langle 128 , \underbrace{64 , 32 , 16 , 8}_{\text{الأوساط هندسية}} , 4 \rangle$

Telegram : @SadsHelp

سؤال 2 أدخل 9 أعداد بين 3,96 بحيث تكون مع هذين العددين متتابعة هندسية .

$a \leftarrow (3)\ ,\ (96) \rightarrow U_n$ ①

$a = 3\ ,\ U_n = 96$

$n =$ عدد الأواسط $+ 2$

$n = 9 + 2 \Rightarrow n = 11$ ②

$U_n = a.r^{n-1}$

$96 = 3\,(r)^{11-1}$

$\frac{96}{3} = \frac{3\,(r)^{10}}{3}$

$r^{10} = 32$

$(r^2)^5 = 2^5$ ← لكي نساوي الأسس

$r^2 = 2$ بالجذر

$r = \mp \sqrt{2}$

عندما $r = \sqrt{2}$

$3 \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 6$

$6 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$6\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 12$

$12 \times \sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

$12\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 24$

$24 \times \sqrt{2} = 24\sqrt{2}$

$24\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 48$

$48 \times \sqrt{2} = 48\sqrt{2}$

$48\sqrt{2} \times \sqrt{2} = (96)$

$\langle 3\ ,\ 3\sqrt{2}\ ,\ 6\ ,\ 6\sqrt{2}\ ,\ 12\ ,\ 12\sqrt{2}\ ,\ 24\ ,\ 24\sqrt{2}\ ,\ 48\ ,\ 48\sqrt{2}\ ,\ 96 \rangle$

عندما $r = -\sqrt{2}$

$\langle 3\ ,\ -3\sqrt{2}\ ,\ 6\ ,\ -6\sqrt{2}\ \langle\ 12\ ,\ -12\sqrt{2}\ ,\ 24\ ,\ -24\sqrt{2}\ ,\ 48\ ,\ -48\sqrt{2}\ ,\ 96 \rangle$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

مجموع المتتابعة الهندسية

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} \qquad r \neq 1$$

* n= عدد الحدود المطلوب إيجاد مجموعها

مثلاً: جد مجموع ثمانية حدود من متتابعة هندسية .
$n = 8$

* Sn= المجموع

سؤال 1 جد مجموع الستة حدود $(n=6)$ الأولى من المتتابعة الهندسية: $\langle 64 , 32 , 16 , ... \rangle$

$\langle 64 , 32 , 16 , ... \rangle$ ← متتابعة صريحة

$\frac{32}{64} = \frac{1}{2}$ ÷ ÷

من الكلام

$n = 6$, $a = 64$, $r = \frac{32}{64} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

a ↙ ↘ r

مطلوب ؟

$$S_n = \frac{a\,(1-r^{(n)})}{1-r}$$ تطبيق مباشر

توضيح $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1^6}{2^6} = \frac{1}{64}$

$$S_6 = \frac{64\,(1-(\frac{1}{2})^6)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_6 = \frac{64\,(1-\frac{1}{64})}{\frac{1}{2}} = \frac{64-1}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{\frac{1}{2}}$$ ← القسمة نقلب إلى ضرب

$$S_6 = 63 \times \frac{2}{1} = 126$$

Telegram : @SadsHelp

سؤال 2 اكتب المتتابعة الهندسية التي مجموع الحدود الستة الأولى منها 504 واساسها = 2

المجموع $= 504 \Rightarrow \boxed{S_6 = 504}\ ,\ \boxed{n = 6}\ ,\ \boxed{r = 2}\ ,\ a = ?$

المجموع ?

$$S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}$$

(ممنوع طرح 1 من 2^6 لأنه مرفوع للأس)

$$504 = \frac{a\,(1 - 2^6)}{1 - 2}$$

$$504 = \frac{a\,(1 - 64)}{-1}$$

$$504 = \frac{-63a}{-1} \Rightarrow \left[504 = 63a\right] \div 63$$

$$\frac{504}{63} = \frac{63\,a}{63}$$

$$\boxed{a = 8}$$

$8 \times 2 = 16$ (الأساس × الحد الأول)

$16 \times 2 = 32$

$32 \times 2 = 64$ المتتابعة ← $\langle 8\ ,\ 16\ ,\ 32\ ,\ 64\ ,\ 128\ ,\ \ldots. \rangle$

$64 \times 2 = 128$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

مجموع المتتابعة الهندسية اللانهائية

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

يستخدم عندما يذكر أو يلفظ (متتابعة هندسية لأنهاية) أو جد مجموعها الا مالانهاية .

سؤال 1 جد :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ مالانهاية

$a = \frac{1}{2}$ ، $r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$ القسمة تقلب إلى ضرب مع قلب الكسر الذي يلي القسمة

$$r = \frac{1}{\cancel{4}_{2}} \times \frac{\cancel{2}^{1}}{1}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

توحيد مقامات او كل كمية تقسم على نفسها الناتج واحد

$S_\infty = 1$

٥٧

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 2 متتابعة هندسية موجبة الحدود حاصل ضرب حدودها الثلاثة الأولى $= \frac{1}{27}$ ومجموع حدودها الثاني والثالث والرابع $\frac{13}{27}$ أوجد المتتابعة . ثم جد مجموعها الى ما لانهاية .

حاصل ضرب حدودها الثلاثة الأولى $(a)(ar)(ar^2) = \frac{1}{27}$

$a^3r^3 = \frac{1}{27} \Rightarrow (ar)^3 = \frac{1}{27}$

$\boxed{ar = \frac{1}{3}} \ldots (1)$

$= \frac{13}{27}$ الحد الرابع + الحد الثالث + الحد الثاني

عامل مشترك (ar)

$ar + ar^2 + ar^3 = \frac{13}{27}$

$ar\ (1 + r + r^2) = \frac{13}{27}$

$\left[\frac{1}{3}\ (1 + r + r^2) = \frac{13}{27}\right] * 27$

$\frac{1}{3}(27)(1 + r + r^2) = \frac{13}{27}(27)$

$9\ (1 + r + r^2) = 13$

$9 + 9r + 9r^2 = 13$

$9r^2 + 9r + 9 - 13 = 0$

$9r^2 + 9r - 4 = 0$

$(3r + 4)(3r - 1) = 0$

يُهمل أما $3r + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{r = \frac{-4}{3}}$

أو $3r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{3}$

نعوض r بمعادلة (1) $ar = \frac{1}{3}$

$a\ (\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{a = 1}$

$\langle 1 , \frac{1}{3} , \frac{1}{9} , \frac{1}{27} , \ldots \rangle$

* مجموع المتتابعة الى ما لانهاية :

$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{\frac{2}{3}}$

$= \frac{3}{2}$

الملاحظات

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 3 ثلاثة اعداد مكونة متتابعة حسابية مجموعها 18 ولو اضيفت الأعداد 1 , 2 , 7 إلى حدودها على الترتيب لتألف من الأعداد الناتجة متتابعة هندسية فما هذه الأعداد .

ملاحظة إذا ذكر عبارة ثلاث اعداد تكون متتابعة حسابية تُفرض

ثابتة ← $a-d\ ,\ a\ ,\ a+d$

$(a+d)+a+(a+d)=18$

$[3a=18]\div 3 \Rightarrow \boxed{a=6}$

$a-d\ ,\ a\ ,\ a+d$

$\dfrac{6-d}{+1}\ ,\ \dfrac{6}{+2}\ ,\ \dfrac{6+d}{+7}$

متتابعة هندسية $\langle 7-d\ ,\ 8\ ,\ 13+d \rangle$

طرفين × وسطين

$\dfrac{8}{7-d}=\dfrac{13+d}{8}$

$(7-d)(13+d)=64$ ← توزيع الأقواس، جمع وطرح، ترتيب المعادلة، تحليل

$91+7d-13d-d^2=64$

$d^2+13d-7d-91+64=0$

$d^2+6d-27=0$

$(d+9)(d-3)=0$

عندما $d=-9$

أما $d+9=0 \Rightarrow d=-9$

أو $d-3=0 \Rightarrow d=3$

$a-d\ ,\ a\ ,\ a+d$

$a-d=6-(-9)=6+9=15$

$a=6$

$a+d=6-9=-3$

الأعداد هي: $15\ ,\ 6\ ,\ -3$

عندما $d=3$

$a-d=6-3=3$

$a=6$

$a+d=6+3=9$

الأعداد هي: $3\ ,\ 6\ ,\ 9$

الملاحظات

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 4 متتابعة هندسية حدها الأول (3) فإذا كان حدها الثاني والرابع والثامن تؤلف متتابعة هندسية . أوجد المتتابعة الحسابية .

$a = 3$

متتابعة هندسية $\langle$ الحد الثاني , الحد الرابع , الحد الثالث $\rangle$

متتابعة هندسية $\langle\ a+d\ ,\ a+3d\ ,\ a+7d\ \rangle$

$$\frac{a+3d}{a+d} \overset{(r)}{=} \frac{a+7d}{a+3d}$$

$$(a+3d)(a+3d) = (a+7d)(a+d)$$

- توزيع الاقواس
- تصفير المعادلة
- الجمع والطرح بين الحدود
- الحل بالتحليل

$$a^2 + 3ad + 3ad + 9d^2 = a^2 + ad + 7ad + 7d^2$$

$$6ad + 9d^2 = 8ad + 7d^2$$

$$9d^2 - 7d^2 + 6ad - 8ad = 0$$

$$2d^2 - 2ad = 0 \div 2$$

$$d^2 - ad = 0 \qquad a = 3 \quad \text{من السؤال}$$

$$d^2 - 3d = 0 \qquad \text{عامل مشترك}$$

$$d\,(d-3) = 0$$

$$d = 0 \quad \text{أو} \quad d - 3 = 0 \quad \text{أما}$$

$$d = 3$$

$a = 3$ ← $d = 0$, $d = 3$

$$\langle 3\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ \ldots. \rangle$$

$$\langle 3\ \overset{+3}{,}\ 6\ \overset{+3}{,}\ 9\ \overset{+3}{,}\ 12\ \overset{+3}{,}\ 15\ ,\ \ldots. \rangle$$

تحذير هام جدا WARNING

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية ، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق ، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 5 إذا كان مجموع ثلاث اعداد تؤلف متتابعة هندسية يساوي (70) فاذا ضربنا كل من حدها الأول والثالث في (4) وحدها الثاني في (5) كانت الأعداد الناتجة تؤلف متتابعة حسابية فما هذه الأعداد؟

$$a + ar + ar^2 = 70 \quad \ldots\ldots (1)$$

$4a \quad 5ar \quad 4ar^2$ (متتابعة حسابية)

الحد الأول $\rightarrow 4a$

الحد الثاني $\rightarrow 5ar$

الحد الثالث $\rightarrow 4ar^2$

$\langle 4a \ , \ 5ar \ , \ 4ar^2 \rangle$ متتابعة حسابية

$$\left[5ar - 4a = 4ar^2 - 5ar\right] \div a$$

نقسم على a

$$\frac{5\cancel{a}r}{\cancel{a}} - \frac{4\cancel{a}}{\cancel{a}} = \frac{4\cancel{a}r^2}{\cancel{a}} - \frac{5\cancel{a}r}{\cancel{a}}$$

$$5r - 4 = 4r^2 - 5r$$

$$4r^2 - 5r - 5r + 4 = 0$$

$$4r^2 - 10r + 4 = 0$$

$$(2r - 1)(2r - 4) = 0$$

أما $2r - 1 = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{2}r}{\cancel{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

أو $2r - 4 = 0 \Rightarrow \left[2r = 4\right] \div 2$

$$\frac{\cancel{2}r}{\cancel{2}} = \frac{4}{2} \Rightarrow r = 2$$

نعوض (r) في المعادلة

$$a + a\left(r^{\frac{1}{2}}\right)^2 + a\left(r^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 70$$

Telegram : @SadsHelp

عندما $r = \frac{1}{2}$

$$a + a\,(\frac{1}{2}) + a\,(\frac{1}{2})^2 = 70$$

التخلص من الكسور

$$\left[a + \frac{1}{2}\,a + \frac{1}{4}\,a = 70\right] \times 4$$

$$a\,(4) + \frac{1}{\cancel{2}_{1}}\,a\,(\cancel{4}^{2}) + \frac{1}{\cancel{4}}\,a\,(\cancel{4}) = 70\,(4)$$

$$4a + 2a + a = 280 \;\Rightarrow\; [7a = 280] \div 7$$

$$\frac{\cancel{7}a}{\cancel{7}} = \frac{280}{7} \;\Rightarrow\; \boxed{a = 40}$$

عندما $\boxed{r = 2}$ نُعوض في معادلة (1)

$$a + 2a + 4a = 70 \;\Rightarrow\; [7a = 70] \div 7$$

$$\frac{\cancel{7}a}{\cancel{7}} = \frac{\cancel{70}}{\cancel{7}} \;\Rightarrow\; \boxed{a = 10}$$

$$a + ar + ar^2 = 70$$

$$a = 40 \;,\; r = \frac{1}{2}$$

العدد الأول $= a \;\Rightarrow\; a = 40$

العدد الثاني $= ar = 40 \times \frac{1}{2} = 20 \;\Rightarrow$ العدد الثاني $= 20$

العدد الثالث $= ar^2 = 40 \times (\frac{1}{2})^2 = \cancel{40}^{10} \times \frac{1}{\cancel{4}_{1}} \;\Rightarrow$ العدد الثالث $= 10$

عندما $a = 10$

$r = 2$

$$a + ar + ar^2 = 70$$

العدد الأول $= a = a = 10$

العدد الثاني $= ar = 2 \times 10 = 20$

العدد الثالث $= ar^2 = 10\,(2)^2 = 40$

$$[10 \;,\; 20 \;,\; 40]$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 4 إذا كان مجموع متتابعة هندسية (Sn) اساسها $r=3$ (3) هو المجموع 728 وحدها الأخير =486

جد الحد الأول a وعدد حدودها n.

$V=3\ ,\ S_n=728\ ,\ a=?\quad n=?\ ,\ Un=486$

$$Sn=\frac{a\,(1-r^n)}{1-r}$$

$$728=\frac{a\,(1-3^n)}{1-3}$$ تعويض

$$\frac{728}{1}=\frac{a\,(1-3^n)}{-2}$$

$$a\,(1-3^n)=-1456 \quad \ldots.\ (1)$$

$$Un=ar^{n-1}$$

$$\frac{486}{(3)^{n-1}}=\frac{a\,(3)^{n-1}}{(3)^{n-1}}$$ مقام — نقسم على $(3)^{n-1}$

$$a=\frac{486}{(3)^{n-1}} \quad \ldots.\ (2)$$

$$\left[\frac{486}{3^{n-1}}\,(1-3)^n=-1456\right](3^{n-1})$$

$$486\,(1-3^n)=-1456\,(3)^{n-1}$$ — $\frac{3^n\times 3^{-1}}{3}$ عند ضرب لجمع الأس

$$\left[486-486\,(3)^n=\frac{-1456\,(3)^n}{3}\right]\times 3$$

Telegram : @SadsHelp

$$1458 - 1458\ (3)^n = -1456\ (3)^n$$

$$1458 = -1456\ (3)^n + 1458\ (3)^n$$

$$\frac{1458}{2} = \frac{2\ (3)^n}{2}$$

$$(3)^n = 729$$

$$(3)^n = 3^6$$

$$n = 6$$

$$a = \frac{486}{(3)^5} = \frac{486}{243}$$

$$a = 2$$

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3

نعوض قيمة (n) في (2)

الملاحظات

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

3

MATHEMATIC

المُسند في الرياضيات

الاستاذ حيدر وليد

الخامس العلمي

الفصل الثالث

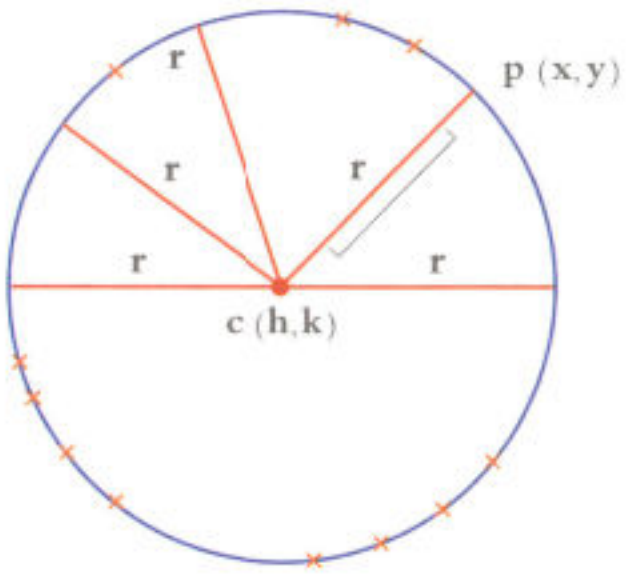
الدائـــرة

ملازم دار المغرب
077 100 55555
Mob: 6561

Telegram : @SadsHelp

الدائرة

الدائرة: هي مجموعة نقاط على المستوي يكون بعدها عن نقطة ثابتة تسمى المركز ثابتاً يسمى نصف القطر .



r = نصف قطر الدائرة

$c\ (h,k)$ = مركز الدائرة

أولاً : المعادلة القياسية للدائرة:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

* بهذه المعادلة نحتاج الى أمرين
1. نصف قطر (r)
2. المركز $c\ (h,k)$

مركز

الحالة الأولى إيجاد المعادلة القياسية للدائرة إذا أعطى نصف القطر والمركز $r\ ,\ (h,k)$

تطبيق مباشر

مثال 1 جد معادلة الدائرة التي مركزها $(5,3)$ ونصف قطرها 4 وحدات .

$c\ (5,3)$ $\overset{h\ ,\ k}{}$ $\qquad r=4$

* بما انه معطي $r\ ,\ (h,k)$

إذاً مباشرة نكتب المعادلة القياسية

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-5)^2+(y-3)^2=(4)^2$$

$$(x-5)^2+(y-3)^2=16$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 2 جد معادلة الدائرة التي مركزها $c\ (3,-2)$ ونصف قطرها 5 وحدات .

$\overset{h}{c}\ (3,\overset{k}{-2})$ $\qquad r=5$

معادلة الدائرة القياسية $\Rightarrow\ (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-3)^2+(y-(-2))^2=(5)^2$

$$(x-3)^2+(y+2)^2=25$$

سؤال 3 جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها (6) وحدات .

$\overset{h}{c}\ (0,\overset{k}{0})$ $\qquad r=6$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-0)^2+(y-0)^2=(6)^2$

$$x^2+y^2=36$$

ملاحظة إذا أعطى مركز الدائرة $c\ (h,k)$ ونصف قطر الدائرة (r) نستخدم معادلة الدائرة القياسية مباشرة ونعوض فقط .

الحالة الثانية إيجاد معادلة دائرة إذا أعطى نقطة تمر بها الدائرة $P\ (x,y)$ ومركز الدائرة $c\ (h,k)$

خطوات الحل

1. نجد المسافة بين المركز والنقطة

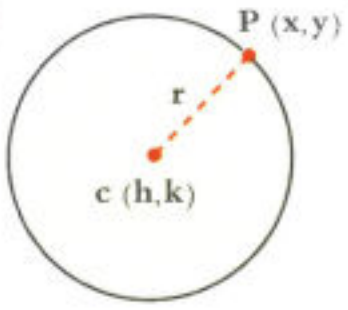
$$pc=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

2. المسافة بين المركز والنقطة تمثل (r)

$$pc=r$$

3. نستخدم معادلة الدائرة القياسية

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$



شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 4 جد معادلة الدائرة التي مركزها $c\ (4,3)$ وتمر بالنقطة $(2,1)$.

$P\ (\overset{x_1}{2}, \overset{y_1}{1})$ ، $c\ (\overset{x_2}{4}, \overset{y_2}{3})$

$$Pc = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$Pc = \sqrt{(4-2)^2 + (3-1)^2}$$

$$Pc = \sqrt{(2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4+4} \Rightarrow Pc = \sqrt{8}$$

حالة أولى (نضيف فطر ومركز)

$r = \sqrt{8}$ $\qquad c\ (\overset{h}{4}, \overset{k}{3})$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{8})^2$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^3 = 8$$

سؤال 5 جد معادلة الدائرة التي مركزها $c\ (-1,5)$ وتمر بالنقطة $P\ (4,3)$.

$c\ (\underset{(x_2,y_2)}{-1}, \underset{}{5})$ ، $P\ (\underset{(x_1,y_1)}{4}, \underset{}{3})$

$$Pc = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$Pc = \sqrt{(-1-4)^2 + (5-3)^2}$$

جمع

$$Pc = \sqrt{(-5)^2 + (2)^2}$$

$$Pc = \sqrt{25+4} \Rightarrow Pc = \sqrt{29}$$

$$\therefore r = \sqrt{29} \quad , \quad c\ (\underset{h}{-1}, \underset{k}{5})$$

نستخدم معادلة الدائرة القياسية

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-(-1))^2 + (y-5)^2 = (\sqrt{29})^2$$

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 29$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 6 جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة $P\ (-4,3)$.

$c\ (\overset{x_2}{0}\ ,\ \overset{y_2}{0})$ $\qquad$ $P\ (\overset{x_1}{-4}\ ,\ \overset{y_1}{3})$

مركز + نقطة = الحالة الثانية

$$Pc=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$Pc=\sqrt{(0-(-4))^2+(0-3)^2}$$

$$Pc=\sqrt{(4)^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}$$

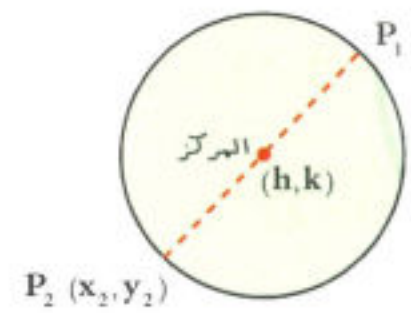
$$Pc=5 \Rightarrow r=5 \quad , \quad c\ \underset{h\ ,\ k}{(0\ ,\ 0)}$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-0)^2+(y-0)^2=(5)^2$$

$$\boxed{x^2+y^2=25}$$

الحالة الثالثة إذا أعطى نهاية قطر في الدائرة .



خطوات الحل

أولاً : نجد احداثي المركز $c\ (h,k)$ بأستخدام قانون المنتصف

$$c\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right) \Rightarrow c\ (h\ ,\ k)$$

ثانياً : نجد المسافة بين إحدى النقطتين P_1 أو P_2 مع المركز Pc وهي وهي تمثل (r)

$$r=Pc=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ثالثاً : نستخدم المعادلة القياسية

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 7 جد معادلة الدائرة التي نهاية أحد اقطارها النقطتان $P_1(4,5)$ ، $P_2(-2,3)$

$P_1(\overset{(x_1,y_1)}{4,5})$ ، $P_2(\overset{(x_2,y_2)}{-2,3})$

$c(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

$c(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{5+3}{2})$

$c(\frac{2}{2}, \frac{8}{2}) \Rightarrow c(\overset{h}{1}, \overset{k}{4})$

$P_1(\underset{x_1,y_1}{4,5})$ ، $c(\underset{x_2,y_2}{1,4})$

$P_1c = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$P_1c = \sqrt{(1-4)^2+(4-5)^2}$

$P_1c = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2} = \sqrt{9+1} \Rightarrow P_1c = \sqrt{10}$

$\boxed{r = \sqrt{10}}$

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ ، $(\overset{h}{1}, \overset{k}{4})$

$\boxed{(x-1)^2+(y-4)^2 = 10}$

سؤال 8 جد معادلة الدائرة التي نهاية قطرها فيها $P_1(2,-3)$ ، $P_2(4,1)$

$P_1(\underset{(x_1,y_1)}{2,-3})$ ، $P_2(\underset{(x_2,y_2)}{4,1})$

$c(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

$c(\frac{2+4}{2}, \frac{-3+1}{2}) \Rightarrow c(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2})$

$\boxed{c(\overset{h}{3}, \overset{k}{-1})}$

$c(\overset{x_1}{3}, \overset{y_1}{-1})$ ، $P_1(\overset{x_2}{2}, \overset{y_2}{-3})$ نجد المسافة

$P_1c = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$P_1c = \sqrt{(2-3)^2+(-3-(-1)^2}$

$P_1c = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\therefore r = \sqrt{5}$ ، $c(\overset{h}{3}, \overset{k}{-1})$

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

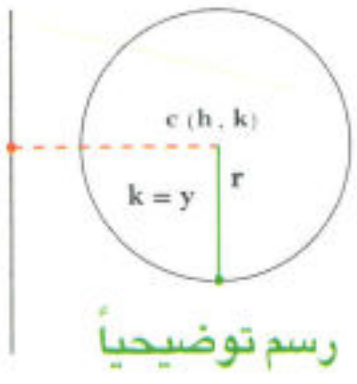
$(x-3)^2+(y-(-1))^2 = (\sqrt{5})^2$

$\boxed{(x-3)^2+(y+1)^2 = 5}$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

الحالة الرابعة إيجاد معادلة دائرة تمس أحد المحورين أو كلاهما.



رسم توضيحياً

$\Rightarrow$ c (h , k)

$r = |k|$
[عندما تمس محور السينات]

$r = |h|$
[عندما تمس محور الصادات]

$r = |h| = |k|$
[عندما تمس المحورين]

سؤال 1 جد معادلة الدائرة التي تمس المحور السيني ومركزها c (3 , 2)

$c\ (\overset{h}{3}\ ,\ \overset{k}{2}) \Rightarrow r = |k| = |2| = 2$

الحالة الأولى
- نصف القطر: $r = 2$
- مركز: $c\ (h , k) = (3 , 2)$

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$

سؤال 2 جد معادلة الدائرة التي تمس المحور الصادي ومركزها c (4 , −1)

$c\ (\overset{h}{4}\ ,\ \overset{k}{-1}) \Rightarrow r = |h| = |4| = 4$

الحالة الأولى
- نصف القطر: $r = 4$
- +
- مركز: $c\ (4 , -1)$

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x-4)^2 + (y-(-1))^2 = (4)^2$

$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 16$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 3 جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين ومركزها $(4\ ,-4)$

$r = |h| = |k|$

$r = |4| = |-4| \Rightarrow r = 4$

$c\ (4\ ,-4)$

$(h\ ,\ k)$

الحالة الأولى = نصف القطر + المركز

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x-4)^2 + (y+4)^2 = 16$

* عندما تمس المحورين فأن الأرقام $c\ (4\ ,-4)$ تكون متشابهة .

ملاحظة إذا مست الدائرة المحورين الأحداثيين :

$c\ (r\ ,\ r)$	الربع الأول	+	+
$c\ (-r,\ r)$	الربع الثاني	−	+
$c\ (-r,-r)$	الربع الثالث	−	−
$c\ (r\ ,-r)$	الربع الرابع	+	−

* دائرة تمس المحورين نصف قطره 3 وحدات تقع في الربع الثالث .

$r = 3$, $c\ (-r,-r)$

$c\ (-3,-3)$

سؤال جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين وتقع في الربع الثالث $(-\ ,\ -)$ ونصف قطرها (5) وحدات .

لازم نعرف اشارات الأرباع

$r = 5$ ⟵ نصف القطر

$c\ (-r,-r)$

بما ان تقع في الربع الثالث

$c\ (-5,-5)$ ⟵ المركز

$(h\ ,\ k)$

بما ان عدنا نصف قطر ومركز اذا الحالة الأولى

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x-(-5))^2 + (y-(-5))^2 = (5)^2$

$(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال جد معادلة الدائرة التي نصف قطرها (5) وحدات وتمس المحورين تقع :

أولاً : في الربع الثاني

ثانياً : في الربع الرابع

ثالثاً : في الربع الأول

أولاً : تقع في الربع الثاني $r = 5$

$(-\ ,\ +)$

أولى ⟵ نصف قطر + مركز

$c\ (-r\ ,\ r)$

$c\ (-5\ ,\ 5)$

$c\ (h\ ,\ k)$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x+5)^2+(y-5)^2=25$

ثانياً : تقع في الربع الرابع

$(+\ ,\ -)$

$r = 5$

$c\ (r\ ,-r)$

$c\ (5\ ,-5)$

$c\ (h\ ,\ k)$

نعوض h و k و r

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-5)^2+(y+5)^2=25$

ثالثاً : تقع في الربع الأول

$(+\ ,\ +)$

$r = 5$

$c\ (r\ ,\ r)$

$c\ (\underset{h}{5}\ ,\ \underset{k}{5})$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

* معادلة دائرة إذا أعطى نقطة وقال تمس المحورين :

خطوات الحل

أولاً : نجد المركز

حسب الربع
- $c\ (r\ ,\ r)$
- $c\ (-r,\ r)$
- $c\ (-r\ ,-r)$
- $c\ (r\ ,-r)$

ثانياً : نكتب معادلة الدائرة $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

ثالثاً : نعوض $p\ (x,y)$ و $c\ (h,k)$ ونجد r

سؤال جد معادلة الدائرة المارة بالنقطة $p\ (\underset{+}{2}\ ,\ \underset{+}{1})$ وتمس المحورين الاحداثيين .

$c\ (\underset{h}{r}\ ,\ \underset{k}{r})\ ,\ P\ (\underset{x}{2}\ ,\ \underset{y}{1})$

الربح الأول

معادلة بمجهول واحد

1. نفتح الأقواس ×
2. نصفر المعادلة ×
3. نجمع ونطرح بين الحدوديات ×
4. نحلل ونجد (r)

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$

مربع حدانية مربع حدانية

$4-4r+r^2+1-2r+r^2=r^2$

$4-4r+r^2+1-2r+r^2-r^2=0$

$r^2-6r+5=0$ نحلل

$r^2-6r+5=0$

$(r-5)(r-1)=0$

أما $r-5=0 \Rightarrow \boxed{r=5}$

أو $r-1=0 \Rightarrow \boxed{r=1}$

حالة أولى :

عندما $r=5$ | $c\ (r\ ,\ r)$

$c\ (\underset{h}{5}\ ,\ \underset{k}{5})$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

عندما $r=1$ | $c\ (\underset{h}{1}\ ,\ \underset{k}{1})$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

Telegram : @SadsHelp

سؤال جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة $(\overset{+}{6}\ ,\ \overset{-}{-3})$ وتمس المحورين الاحداثيين .

تقع في الربع الثاني $(-,+)$

$$P\ (\underset{x}{-3},\ \underset{y}{6}) \qquad c\ (\underset{h}{-r},\ \underset{k}{r})$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(-3+r)^2+(6-r)^2=r^2$$

$$9-6r+r^2+36-12r+r^2-r^2=0$$

$$r^2-18r+45=0$$

$$(r-15)(r-3)=0$$

أما $r-15=0 \Rightarrow r=15$

أو $r-3=0 \Rightarrow r=3$

عندما $r=15$

$$c\ (-r\ ,\ r)$$

$$c\ (-15,15)$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$\boxed{(x+15)^2+(y-15)^2=225}$$

عندما $r=3$

$$c\ (-r\ ,\ r)$$

$$c\ (\underset{h}{-3}\ ,\ \underset{k}{3})$$

$$(x-k)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$\boxed{(x+3)^2+(y-3)^2=9}$$

تحذير هام جدا WARNING

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية ، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق ، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعا وقانونا استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.
لذا اقتضى التنويه والتحذير

Telegram : @SadsHelp

الحالة الخامسة المعادلة العامة للدائرة.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ (القياسية)

$x^2+y^2+Ax+By+c=0$ المعادلة العامة للدائرة

مميزات المعادلة

1. معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ x , y
2. معامل x^2 = معامل y^2 [يفضل ان يكون يساوي 1]
3. خالية من الحد $(x.y)$

لأيجاد (r) من معادلة الدائرة

$r=\sqrt{h^2+k^2-c}$ $\quad r>0$

$c\,(h\,,k)$ $\quad k=\dfrac{-B}{2}$, $h=\dfrac{-A}{2}$

$B \leftarrow$ معامل (y) $\quad A \leftarrow$ معامل (x)

$c \leftarrow$ الحد الخالي من (x) أو (y)

4. $r>0$ نصف القطر أكبر صفر أي موجب.

سؤال أي المعادلات الآتية تُمثل معادلة دائرة ؟

1. $x^{3}+y^{3}-2x+6y-9=0$

لاتُمثل معادلة دائرة.

السبب : لأنها معادلة من الدرجة الثالثة.

---

2. $3x^{2}-3y^{2}-2x+6y-19=0$

لاتُمثل معادلة دائرة.

السبب : لأن معامل x^2 ≠ معامل y^2

---

3. $x^{2}+y^{2}-5xy-2x+6y-19=0$

لاتُمثل معادلة دائرة.

السبب : لأنها تحوي الحد (xy)

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

4 $x^2+y^2\ \underset{(-2)}{-2x}\ \underset{(+6)}{+6y}+19=0$

$A=-2$
$B=+6$
$c=19$
$\Rightarrow$

$$h=\frac{-A}{2}=\frac{-(-2)}{2}=1$$

$$k=\frac{-B}{2}=\frac{-(6)}{2}=-3$$

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}$$

$$r=\sqrt{(1)^2+(-3)^2-19}$$

$$r=\sqrt{1+9-19}$$ إشارة القانون سالب

$$r=\sqrt{-9}\notin R$$

$h^2+k^2-c>0$ لاتُمثل معادلة دائرة لأن

5 $x^2+y^2-2x+6y-19=0$

$A=-2$
$B=6$
$c=-19$

$$h=\frac{-A}{2}=\frac{-(-2)}{2}=1\Rightarrow h=1$$

$$k=\frac{-B}{2}=\frac{-(6)}{2}=-3\Rightarrow k=-3$$

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}$$

$$r=\sqrt{(1)^2+(-3)^2-(-19)}$$

$$r=\sqrt{1+9+19}=\sqrt{29}$$

$h^2+k^2-c>0$ تُمثل معادلة دائرة لأن

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال بين أي المعادلات الآتية تُمثل معادلة دائرة :

1 $x^2+3y^2-2x+3y=0$

لاتُمثل معادلة دائرة لأن معامل x^2 لا يساوي معامل y^2 .

2 $x^2+y^2+4x-6y=12$

$x^2+y^2+4x-6y-12=0$

$A=4\ ,\ B=-6\ ,\ c=-12$

$$\left.\begin{aligned} h&=\frac{-A}{2}=\frac{-4}{2}=-2\\ k&=\frac{-B}{2}=\frac{-(-6)}{2}=3\end{aligned}\right] \Rightarrow c\overset{h\ ,\ k}{(-2\ ,\ 3)}$$ المركز

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{(-2)^2+(3)^2-(-12)}$$

$$=\sqrt{4+9+12}=\sqrt{25}=5$$

$r=5 > 0$ تمثل معادلة دائرة

3 $x^2+y^2+2xy=1$

لاتُمثل معادلة دائرة لأنها تحتوي على حاصل ضرب xy

4 $x^2+y^2=0$

$$x^2+y^2+0x+0y+0=0 \quad \begin{cases} A=0\\ B=0\\ C=0\end{cases}$$

5 $y=-2x$

لاتُمثل معادلة دائرة لأنها من الدرجة الأولى

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال جد أحداثيات المركز ونصف القطر للدائرة

1 $2x^2+2y^2+12x-8y+6=0$

$\left[2x^2+2y^2+12x-8y+6=0\right]\div 2$

نريد استخراج الـ h, x و r

نقسم على معامل x^2, y^2

$x^2+y^2\ (+6)x\ (-4)y\ (+3)=0$

$A=+6 \rightarrow$ معامل x

$B=-4 \rightarrow$ معامل y

$C=+3 \rightarrow$ الحد المطلق وحده بدون x و y

$$h=\frac{-A}{2}=\frac{-(6)}{2}=-3$$

$$k=\frac{-B}{2}=\frac{-(-4)}{2}=2$$

احداثي المركز $c\ (h\ ,\ k)$

$c\ (-3,\ 2)$

$r=\sqrt{h^2+k^2-c}$

$r=\sqrt{(-3)^2+(2)^2-(3)}$ السالب مع التربيع ايروح

$r=\sqrt{9+4-3}$

$r=\sqrt{10}$ نصف القطر

2 $\left[2x^2+2y^2+3x+4y=0\right]\div 2$

ممنوع معامل x و y عدد لازم واحد

$x^2+y^2\ \left(+\frac{3}{2}\right)x\ (+2)y=0$

$A=\frac{3}{2}$, $B=2$, $C=0$

$h=\frac{-A}{2}=\frac{-\frac{3}{2}}{2}\Rightarrow$

$h=\frac{-3}{2}x\frac{1}{2}$

$$h=\frac{-3}{4}$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

3 $2x^2+2y^2+3x+4y=0$

$\left[2x^2+2y^2+3x+4y=0\right]\div 2$

$x^2+y^2+\frac{3}{2}x+2y=0$

$A=\frac{3}{2}\ ,\ B=2\ ,\ c=0$

$h=\frac{-A}{2}=\frac{-\frac{3}{2}}{2}=\frac{-3}{4}$

$k=\frac{-B}{2}=\frac{-2}{2}=-1$

$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{(\frac{-3}{4})^2+(-1)^2-0}=\sqrt{\frac{9}{16}}+1=\sqrt{\frac{25}{16}}$

$r=\frac{5}{4}$

معادلة قياسية

سؤال جد أحداثيات المركز ونصف القطر للدائرة

1 $(x+5)^2+(y-4)^2=36$

نقارن مع المعادلة القياسية

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

جذر الطرفين

$r^2=36 \Rightarrow \boxed{r=6}$ نصف القطر

$\left[-h=+5\right]\times -1$

$\boxed{h=-5}$

$\not{-}k=\not{-}4$

$\boxed{k=4}$

$c\ (-5\ ,\ 4)$ احداثيات المركز

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

2 $(x-2)^2+y^2=9$

$(x-2)^2+(y-0)^2=9$

$(x-h)^2+(y-k)^2=9$

$r^2=9 \Rightarrow r=3$

$h=2\ ,\ k=0 \Rightarrow c\ (2\ ,\ 0)$

3 $(x-5)^2+(y+3)^2=49$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$r^2=49 \Rightarrow r=7$

$h=5\ ,\ k=-3 \Rightarrow c\ (5\ ,\ -3)$

تحذير هام جدا WARNING

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية ، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق ، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

Telegram : @SadsHelp

سؤال أكتب المعادلة العامة للدائرة التي مركزها $c\ (2,-3)$ ونصف قطرها 4 وحدات .

$$r = 4 \quad , \quad c\ (\overset{h}{2}, \overset{k}{-3})$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-2)^2+(y+3)^2=(4)^2$$

1 نفتح التربيع

2 نصفر المعادلة

3 نجمع ونطرح بين الحدود

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=16$$

ترتيب $x^2+y^2-4x+6y+13-16=0$

$$\boxed{x^2+y^2-4x+6y-3=0}$$

$$x^2+y^2+Ax+By+c=0$$

الحالة السادسة إيجاد معادلة دائرة تمر بثلاث نقط :

1 نكتب المعادلة للدائرة $x^2+y^2+Ax+By+c=0$

2 نعوض النقطة الأولى $p_1\ (x\ ,\ y)$ ونكون معادلة ان امكن ثم نعوض $p_2\ (x\ ,\ y)$ ثم $p_3\ (x\ ,\ y)$

3 نحل المعادلات آنياً .

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط $p_1\ (0\ ,\ 0)\ ,\ p_2\ (2\ ,\ 0)\ ,\ p_3\ (3\ ,-1)$

نكتب المعادلة للدائرة $x^2+y^2+Ax+By+c=0$

نعوض $p_1\ (\underset{x}{0}\ ,\ \underset{y}{0})$

$(1)+(0)^2+A\ (0)+B\ (0)+c=0$

$c=0$

نعوض $p_2\ (\underset{x}{2}\ ,\ \underset{y}{0})$

$(2)^2+(0)^2+A\ (2)+B\ (0)+0=0$

$4+2A=0$

$\frac{2A}{2}=\frac{-4}{2}\ \Rightarrow\ A=-2$

$(3)^2+(-1)^2+(-2)(3)+B\ (-1)+0=0$ $p_3\ (\underset{x}{3}\ ,\ \underset{y}{-0})$

$9+1-6-B=0$

$B=4$

$A=-2\ ,\ B=4\ ,\ c=0$

$x^2+y^2+Ax+By+c=0$

$x^2+y^2-2x+4y=0$ معادلة الدائرة

سؤال جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط $p_1\ (1\ ,\ 0)\ ,\ p_2\ (0\ ,\ 1)\ ,\ p_3\ (3\ ,\ 4)$

$x^2+y^2+Ax+By+c=0$ نعوض $p_1\ (\underset{x}{1}\ ,\ \underset{y}{0})$

$(1)^2+(0)^2+A\ (1)+B\ (0)+c=0$

$1+A+c=0\ \Rightarrow\ A+c=-1$ ..... (1)

$(0)^2+(1)^2+A\ (0)+B\ (1)+c=0$ $p_2\ (\underset{x}{0}\ ,\ \underset{y}{0})$

$1+B+c=0\ \Rightarrow\ B+c=-1$ ..... (2)

$(3)^2+(4)^2+A\ (3)+B\ (4)+c=0$ $p_3\ (\underset{x}{3}\ ,\ \underset{y}{4})$

$9+16+3A+4B+c=0$

$3A+4B+c=-25$ ..... (3)

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

بدلالة (A)

$A+c=-1$

$A=-1-c$

$B+c=-1$

$\boxed{B=-1-c}$

نعوض (A) و (B) في معادلة (3)

$3A+4B+c=-25 \quad \ldots\ldots (3)$

$3(-1-c)+4(-1-c)+c=-25$

توزيع

$3-3c-4-4c+1c=-25$

$-3c-4c=-7c+1c=-6c$

$-3-4+1$

-6

$-6c+7=-25$

$-6c=-25+7 \Rightarrow \frac{-6c}{-6}=\frac{-18}{6}$

$\boxed{c=3}$

نعوض في (A) (B)

$2=-1-3=-4$

$3=-1-3=-4$

$x^2+y^2+Ax+By+c=0$

$\boxed{x^2+y^2-4x-4y+3=0}$

الحالة السابعة إذا أعطى نقطتين تمر بها الدائرة وقال:

* المركز على السينات $c\,(h\,,\,0)$
* المركز على الصادات $c\,(0\,,\,k)$

أولاً: نستخدم قانون المسافة بين نقطتين

$p_1c=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ تمثل r

$p_2c=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ تمثل r

فيكون $\boxed{p_1c=p_2c}$

ثانياً: نبسط المعادلة ونجد $(h\,,\,k)$ حسب السؤال.

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $(1,-2)$, $p_2\ (4,-3)$ ويقع مركزها على محور الصادات

$c\ (0,k)$, $p_1\ (1,-2)$
x_2, y_2 , x_1, y_1

$$P_1c=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$P_1c=\sqrt{(0-1)^2+(k+2)^2}$$ مربع حدانية

$$P_1c=\sqrt{1+k^2+4k+4}=r$$

إنتبه!
الجذر ميتوزع على عملية الجمع

$c\ (0,k)$, $p_2\ (4,-3)$
x_2, y_2 , x_1, y_1

$$p_2c=\sqrt{(0-4)^2+(k+3)^2}$$ مربع حدانية

$$p_2c=\sqrt{16+k^2+6k+9}=r$$

$$\sqrt{1+k^2+4k+4}=\sqrt{16+k^2+6k+9}$$ بالتربيع

$$5+k^2+4k=25+k^2+6k$$

$$5-25=6k-4k \Rightarrow [-20=2k]\div 2$$

$$\frac{-20}{2}=\frac{2k}{2} \Rightarrow \boxed{k=-10}$$

المركز $c\ (0,k) \Rightarrow c\ (0,-10)$

$$r=\sqrt{1+k^2+4k+4}=\sqrt{5+k^2+4k}$$

$$r=\sqrt{5+(x-10)^2+4\ (-10)}$$

$$r=\sqrt{5+100-40}$$

$$r=\sqrt{65}$$ نصف قطر + مركز

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-0)^2+(y-(-10))^2=(\sqrt{65})^2$$

$$\boxed{x^2+(y+10)^2=65}$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $(1\ ,\ 5)\ p_2$ ، $(-1\ ,\ 3)$ ويقع مركزها على محور السينات .

$c\ (h\ ,\ 0)$ ، $p_1\ (3\ ,\ -1)$

$P_1c = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$P_1c = \sqrt{(h-3)^2+(0+1)^2}$ $\quad 2\ (h)(3)$

مربع حدانية

$P_1c = \sqrt{h^2-6h+9+1}$

$P_1c = \sqrt{h^2-6h+10}$

$c\ (h\ ,\ 0)$ ، $p_2\ (5\ ,\ 1)$

$P_2c = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$P_2c = \sqrt{(h-5)^2+(0-1)^2}$

$P_2c = \sqrt{h^2-10+25+1}$

$P_2c = \sqrt{h^2-10h+26}$

بالتربيع $\sqrt{h^2-6h+10} = \sqrt{h^2-10h+26}$

$h^2-6h+10 = h^2-10h+26$

$-6h+10h = 26-10 \Rightarrow [4h=16] \div 4$ مجهول

$\frac{4h}{4} = \frac{16}{4} \Rightarrow \boxed{h=4}$ معلوم

$c\ (h\ ,\ 0)$

$c\ (4\ ,\ 0)$

نعوض قيمة (h) في P_1c $\quad r = p_1c = \sqrt{h^2-6h+10}$

$r = \sqrt{(4)^2-6\ (4)+10}$

$r = \sqrt{16-24+10}$

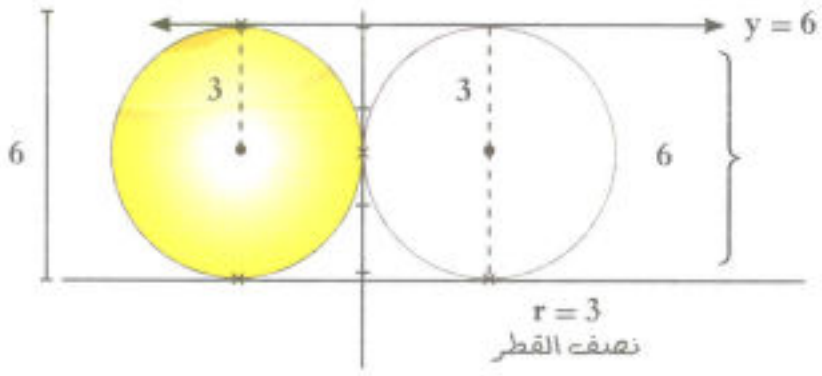
$\boxed{r = \sqrt{2}}$

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

$(x-4)^2+(y-0)^2 = (\sqrt{2})^2$

$\boxed{(x-4)^2+y^2 = 2}$

سؤال جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الاحداثيين وتمس المستقيم $y=6$.



إذا تمس المحوريين الاحداثيين فهناك اربع احتمالات لـ r نأخذ منها

مركز + نصف قطر = حالة أولى

مركز

$c\ (r\ ,\ r) = (3\ ,\ 3)$ ← أول

$c\ (-r,\ r) = (-3,\ 3)$ ← ثاني

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

الربع الأول $\boxed{(x-3)^2+(y-3)^2 = 9}$

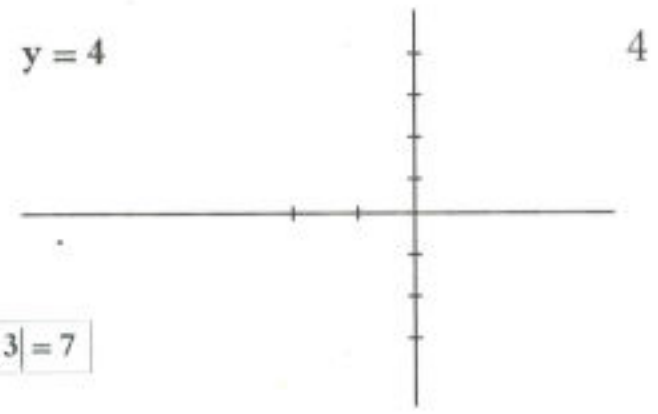
الربع الثاني $\boxed{(x+3)^2+(y-3)^2 = 9}$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيم $y=4$ ومركزها $c\ (-2,-3)$

المركز $h \ , \ k$



نصف قطر $r = 7$

مركز $c\ (-2,-3)$

$r = |4+3| = 7$

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

$\boxed{(x+2)^2+(y+3)^2 = 49}$

سؤال جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمس المستقيم $3x-4y-15=0$

معادلة مستقيم + مركز

$$r = \frac{|\overset{\curvearrowleft}{A}x_1+\overset{\curvearrowleft}{B}y_1+\overset{\curvearrowleft}{c}|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$\underset{A}{3}x-\underset{B}{4}y-\underset{c}{15}=0$, $c\ (\underset{x_1}{0}\ ,\ \underset{y_1}{0})$

$A=3\ ,\ B=-4\ ,\ c=-15$

$x_1=0\ ,\ y_1=0$

$$r = \frac{|3\ (0)+(-4)(0)+(-15)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow r=3$$

الحالة الأولى

$r=3\ ,\ (0\ ,\ 0)$

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

$(x=0)^2+(y-0)^2 = 3^2$

$\boxed{x^2+y^2=9}$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

معادلة مماس الدائرة

لإيجاد معادلة مماس الدائرة وُعلم لدينا:

(مركز دائرة ونقطة)

أما ← يُعطى في السؤال

أو ← نجده من معادلة الدائرة

أولاً: نجد ميل نصف القطر

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ ميل نصف القطر

ثانياً: نجد ميل المماس والذي يكون عمودي على نصف القطر

$m_2 =$ ميل المماس مقلوب m_1 وعكس اشارته

ثالثاً: نطبق القانون

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

(x_1 , y_1) ← النقطة

m ← ميل المماس (m_2)

سؤال 1 جد معادلة المستقيم المماس للدائرة التي مركزها $(-1, 4)$ عند نقطة $p\ (2 , 3)$

$p\ (\underset{x_1}{2} , \underset{y_1}{3})$ ، $c\ (\underset{x_2}{-1} , \underset{y_2}{4})$

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ ميل نصف القطر

$$m_1 = \frac{4-3}{-1-2} = \frac{1}{-3}$$ السالب للكسر كُله $\Rightarrow$ $\boxed{m_1 = \frac{-1}{3}}$

$$m_2 = \frac{+3}{1} \Rightarrow \boxed{m_2 = +3}$$

$y - y_1 = m\ (x - x_1)$

$y - 3 = 3\ (x - 2)$

$y - 3 = 3x - 6 \Rightarrow 0 = 3x - 6 - y + 3$

$3x - y + 3 - 6 = 0$

$\boxed{3x - y - 3 = 0}$

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 2 جد معادلة المستقيم المماس للدائرة $x^2+y^2-2x+4y=0$ عند نقطة $(-1,-1)$

$x^2+y^2-2x+4y=0$ نجد المركز من معادلة الدائرة

$A=-2$ معامل x ، $B=4$ معامل y ، $c=0$ الحد المطلق

$h=\frac{-A}{2}=\frac{-(-2)}{2}=1$ ، $k=\frac{-B}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

$\Rightarrow c(h,k)$ المركز $c(1,-2)$

مركز $c(\underset{x_2}{1},\underset{y_2}{-2})$ نقطة $p(\underset{x_1}{-1},\underset{y_1}{-1})$

1 نجد ميل نصف القطر

$m_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-(-1)}{1-(-1)}=\frac{-2+1}{1+1}$

$\boxed{m_1=\frac{-1}{2}}$ (ميل نصف القطر)

2 نجد ميل المماس

$\left(\begin{matrix}\text{ميل المماس}\\ m_2\end{matrix}\right)=\frac{+2}{1}\Rightarrow \boxed{m_2=2}$ ميل المماس

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-(-1)=2(x-(-1))$ $\quad p(\underset{x_1}{-1},\underset{y_1}{-1})$

$y+1=2x+2$ تصفير $\Rightarrow 0=2x+2-y-1$

$2x-y-1+2=0$

$\boxed{2x-y+1=0}$ معادلة المماس

سؤال 3 جد معادلة مماس الدائرة $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ عند نقطة $p(1,1)$

$(x-3)^2+(y-2)^2=5$ نجد المركز من معادلة الدائرة

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ نقارن مع المعادلة القياسية

$h=3$ ، $k=2\Rightarrow c(h,k)\Rightarrow c(3,2)$ المركز

$c(\underset{x_2}{3},\underset{y_2}{2})$ ، $p(\underset{x_1}{1},\underset{y_1}{1})$

$m_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (ميل نصف القطر)

Telegram : @SadsHelp

$$m_1 = \frac{2-1}{3-1} = \frac{+1}{2}$$

$$\left(\begin{matrix}\text{ميل المماس}\\ m_2\end{matrix}\right) = \frac{-2}{1} \Rightarrow \boxed{m_2 = -2}$$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 1 = -2\,(x - 1)$$

$$y - 1 = -2x + 2$$

$$2x + y - 1 - 2 = 0$$

$$\boxed{2x + y - 3 = 0}$$ معادلة المماس

سؤال 4 جد معادلة مماس الدائرة $x^2 + y^2 = 5$ العمودي على المستقيم $2x - y = 1$ عند نقطة احداثيها $y = 1$

$$2x - 1y = 1$$

ميل المستقيم $m_1 = \frac{-(\text{معامل } x)}{\text{معامل } y} = \frac{-(2)}{-1}$

$$\boxed{m_1 = +2} \Rightarrow \text{ميل المماس } \boxed{m_2 = \frac{-1}{2}}$$

نعوض $(y=1)$ في المعادلة $x^2 + y^2 = 5$

$$x^2 + (1)^2 = 5$$

$$x^2 = 5 - 1 \Rightarrow x^2 = 4$$ بالجذر

$$x = \mp 2$$

$$p_1\ (\underset{x_1}{2}, \underset{y_1}{1}) \quad , \quad p_2\ (-2, 1)$$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$\left[y - 1 = \frac{-1}{2}\,(x - 2)\right] \times 2$$ حتى نتخلص من 2 نضرب الكل بـ 2

$$2y - 2 = -x + 2$$

$$x + 2y - 2 - 2 = 0$$

$$\boxed{x + 2y - 4 = 0}$$

$$p_2\ (\underset{x_1}{-2}, \underset{y_1}{1})$$

$$\left[y - 1 = \frac{-1}{2}\,(x + 2)\right] \times 2$$

$$2y - 2 = -x - 2$$

$$\boxed{x + 2y = 0}$$

ملاحظة

* إذا أعطى مستقيم أو معادلة مستقيم

1. نجد ميل المستقيم $m = \frac{-(\text{معامل } x)}{\text{معامل } y}$
2. إذا ذكر كلمة عمودياً نقلب الميل ونعكس الاشارة m_2
3. إذا أعطى أما (x) أو (y)

نعوض بمعادلة الدائرة لنجد الاحداثي المجهول

4. نطبق القانون $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

Telegram : @SadsHelp

سؤال أوجد معادلة مماس الدائرة $x^2+y^2=5$ عند نقطة $p\ (1\ ,\ 2)$

$x^2+y^2=5 \longrightarrow c\ (0\ ,0)$

$(x-0)^2+(y-0)^2=5$

$p\ (\underset{x_2}{1}\ ,\underset{y_2}{2})$ $\qquad$ $c\ (\underset{x_2}{0}\ ,\underset{y_2}{0})$

$m_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (ميل نصف القطر)

$m_1=\dfrac{0-2}{0-1}=\dfrac{-2}{-1} \Rightarrow \boxed{m_1=2}$

ميل المماس $m_2=\dfrac{-1}{2}$

$y-y_1=m\ (x-x_1)$ (m ← m_2)

$\left[y-2=\dfrac{-1}{2}\ (x-1)\right]\times 2$

$2y-4=-x+1 \Rightarrow 2y-4+x-1=0$

$\boxed{x+2y-5=0}$

سؤال بين موقع النقاط بالنسبة للدائرة $x^2+y^2=25$

$p_1\ (3\ ,\ 4)\ ,\ p_2\ (2\ ,-2)\ ,\ p_3\ (-4,\ 4)$

* عندما يطلب موقع نقطة بالنسبة للدائرة نعوض النقطة بالمعادلة

إذا كان ناتج التعويض = r^2

$p_1\ (\underset{x}{3}\ ,\ \underset{y}{4})$

$x^2+y^2=25$

$(3)^2+(4)^2=25$

$9+16=25$

تقع على قوس الدائرة
تقع على محيط الدائرة
تقع على الدائرة

إذا كان ناتج التعويض أصغر من r^2

$p_2\ (\underset{x}{2}\ ,\underset{y}{-2})$

$x^2+y^2=25$

$(2)^2+(-2)^2=$

$4+4=8$

تقع داخل الدائرة

إذا كان ناتج التعويض أكبر من r^2

$p_3\ (-4,\ 4)$

$(-4)^2+(4)^2=$

$16+16=32$

تقع خارج الدائرة

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

4

MATHEMATIC

المُسند في الرياضيات

الاستاذ حيدر وليد

الخامس العلمي

الفصل الرابع

الدوال الدائرية

ملازم دار المغرب
077 100 55555
@SadsHelp
Mob: 6561

Telegram : @SadsHelp
الاستاذ حيدر وليد

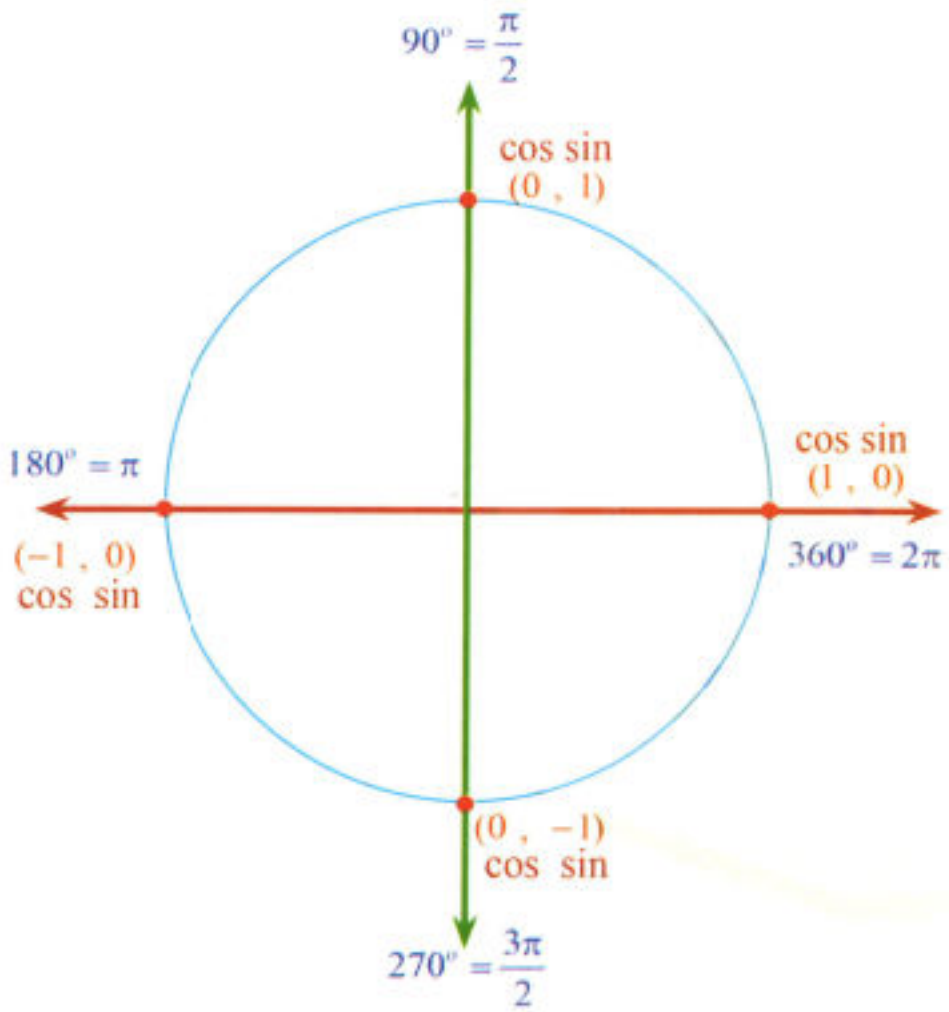
الدوال الدائرية

الدوال الدائرية هي : $(\sin x\ ,\ \cos x\ ,\ \tan x\ ,\ \cot x\ ,\ \sec x\ ,\ \csc x)$

اولاً : زوايا الجدول (حفظ)

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$45^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

ثانياً : زوايا دائرة الوحدة:



قوانين : (سبق لك معرفتها في المراحل السابقة)

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos^2 x + \cos^2 x = 1$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 1

تحقق مما يأتي: (من تمارين 4-2)

$$\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} = 1$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

$$\frac{4}{4} = 1$$

$$1 = 1$$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

سؤال 2

جد قيمة مايأتي: (من تمارين 4-2)

① $\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ = 1$

$\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ = 1$

← قانون

② $\cos^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6}$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

سؤال 3

اوجد $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ اذا علمت ان الضلع النهائي للزاوية (x) الموجهة بالوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقاط المثلثية التالية (تمارين 2-4)

(a) $(\frac{1}{\sqrt{5}} , \frac{-2}{\sqrt{5}})$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} , \sin x = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x = \frac{\frac{-2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$\tan x = \frac{-2}{\cancel{\sqrt{5}}} \times \frac{\cancel{\sqrt{5}}}{1} = \boxed{-2}$$

(b) $(\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2})$

$$\cos x = \frac{1}{2} , \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\tan x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{1} = \boxed{\sqrt{3}}$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

(c) $(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$

$\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$, $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan x = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{-\sqrt{3}}{3}}$

$\tan x = \frac{\sqrt{6}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{-\sqrt{3}}$

$\tan x = \frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \boxed{-\sqrt{2}}$

(d) $(-0.6 , -0.8)$

$\cos x = -0.6$, $\sin x = -0.8$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan x = \frac{-0.8}{-0.6}$

$\tan x = + \frac{0.8}{0.6}$

$\tan x = \frac{8}{6} \Rightarrow \boxed{\frac{4}{3}}$

(القياس الرئيسي للزاوية)

$\boxed{\theta \in [0, 360^\circ)}$

$\boxed{\theta \in [0, 2\pi)}$

$\boxed{\text{Angle} = \theta + 2k\pi}$, $k =$ عدد صحيح

(ايجاد القياس الرئيسي للزاوية)

اولاً : الزاوية من النوع $(n\ \pi)$

(1) عدد صحيح فردي مضروب بـ (π)

* لايجاد القياس الرئيسي لهذا النوع نطرح اقرب عدد زوجي اصغر من (π)

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال جد القياس الرئيسي للزاوية :

1 21π

$21\pi \Rightarrow 21\pi - 20\pi = \boxed{\pi}$

القياس الرئيسي للزاوية 21π هو $\boxed{\pi}$

2 13π

$13\pi \Rightarrow 13\pi - 12\pi = \boxed{\pi}$

القياس الرئيسي للزاوية 13π هو $\boxed{\pi}$

3 17π

$17\pi \Rightarrow 17\pi - 16\pi = \boxed{\pi}$

القياس الرئيسي للزاوية 17π هو $\boxed{\pi}$

4 99π

$99\pi \Rightarrow 99\pi - 98\pi = \boxed{\pi}$

القياس الرئيسي للزاوية 99π هو $\boxed{\pi}$

* اذا كانت (π) مضروبة بعدد صحيح فردي فأن القياس الرئيسي دائماً (π)

سؤال جد ناتج :

1 $\cos(23\pi)$

$\cos(23\pi) = \cos(23\pi - 22\pi)$

$= \cos(\pi) = \boxed{-1}$

2 $\sin(11\pi)$

$\sin(11\pi) = \sin(11\pi - 10\pi)$

$= \sin\pi = \boxed{0}$

3 $\cos(27\pi)$

$\cos(27\pi) = \cos(27\pi - 26\pi)$

$= \cos(\pi) = \boxed{-1}$

4 $\sin(21\pi)$

$\sin(21\pi) = \sin(21\pi - 20\pi)$

$= \sin\pi = \boxed{0}$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

اذا كانت (π) مضروبة بعدد صحيح زوجي $(n\pi)$

عدد صحيح زوجي

س 1 جد القياس الرئيسي للزوايا التالية

1) $24\pi \Rightarrow 24\pi - 24\pi = 0$

القياس الرئيسي للزاوية 24π هو $\boxed{0}$

2) $12\pi \Rightarrow 12\pi - 24\pi = 0$

القياس الرئيسي للزاوية 12π هو $\boxed{0}$

3) $16\pi \Rightarrow 16\pi - 16\pi = 0$

القياس الرئيسي للزاوية 16π هو $\boxed{0}$

4) $100\pi \Rightarrow 100\pi - 100\pi = 0$

القياس الرئيسي للزاوية 100π هو $\boxed{0}$

س 2 جد ناتج ما يأتي:

من تمارين (2-4)

$\boxed{1}$ $\cos(30\pi) = \cos(30\pi - 30\pi)$
$= \cos(0) = 1$

$\boxed{2}$ $\sin(30\pi) = \sin(30\pi - 30\pi)$
$= \sin(0) = 0$

اضافيات لتعزيز الفهم

$\boxed{3}$ $\cos(10\pi) = \cos(10\pi - 10\pi)$
$= \cos(0) = 1$

$\boxed{4}$ $\sin(20\pi) = \sin(20\pi - 20\pi)$
$= \sin(0) = 0$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

خلاصة

$(n\pi) \leftarrow n$ فردي
نطرح اقرب عدد زوجي اصغر من n
الناتج $\leftarrow \pi$

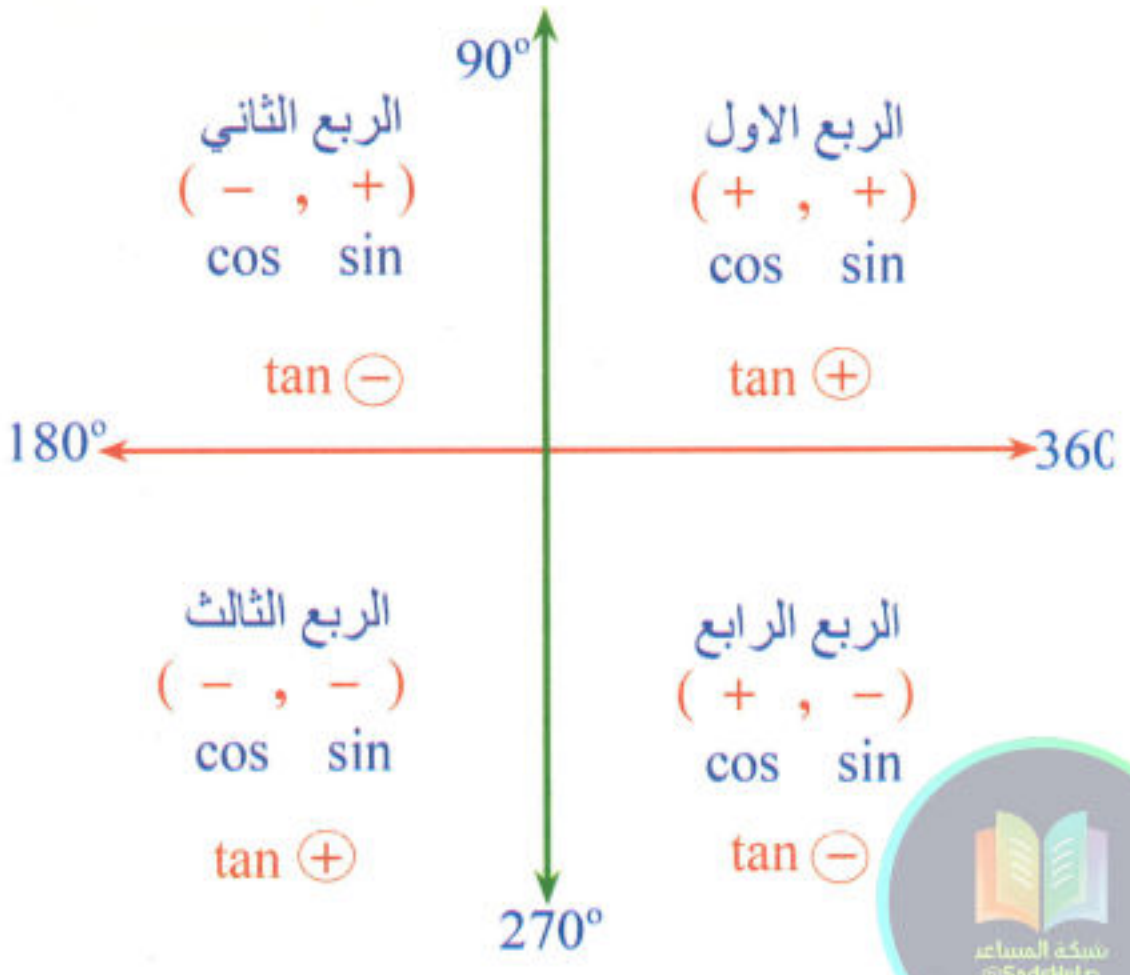
$(n\pi) \leftarrow n$ زوجي
نطرح العدد زوجي بكامله
الناتج $\leftarrow \pi$

القياس الرئيسي	الزاوية
π	23π
π	25π
π	49π
π	30π
π	16π
π	32π

ثانياً : الزوايا التابعة لزوايا الجدول (تابعة لـ $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$)

شكل الزاوية
π بسط / مقام

* البسط اصغر ضعف المقام



شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

جد ناتج :

1 $\cos\frac{2\pi}{3}$

$\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{-1}{2}$

$2\times60^\circ=120^\circ$ → تقع في الربع الثاني

$(-\ ,\ +)$

cos sin

2 $\sin\frac{3\pi}{4}$

$\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{+1}{\sqrt{2}}$

$3\times45^\circ=135^\circ$ → تقع في الربع الثاني

$(-\ ,\ +)$

cos sin

3 $\cos\frac{11\pi}{6}$

$\cos\frac{11\pi}{6}=\frac{+\sqrt{3}}{2}$

$11\times30^\circ=330^\circ$ → تقع في الربع الثاني

$(+\ ,\ -)$

cos sin

4 $\sin\frac{5\pi}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$5\times45^\circ=225^\circ$ → تقع في الربع الثالث

$(-\ ,\ -)$

cos sin

5 $\sin\frac{7\pi}{4}$

$\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$7\times45^\circ=315^\circ$ → تقع في الربع الرابع

$(+\ ,\ -)$

cos sin

6 $\cos\frac{4\pi}{3}$

$\cos\frac{4\pi}{3}=\frac{-1}{2}$

$4\times60^\circ=240^\circ$ → تقع في الربع الثالث

$(-\ ,\ -)$

cos sin

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

7 $\tan\frac{11\pi}{6}$

$\tan\frac{4\pi}{3} = +\sqrt{3}$

$4\times 60^\circ = 240^\circ$ → تقع في الربع الثالث

$\tan$ ⊕

توضيح

ايجاد $\tan\pi$

$$\tan\pi = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

ثالثاً: اذا كان البسط اكبر من ضعف المقام

1) نقسم البسط على المقام ونجد الناتج

2) نطرح اقرب عدد زوجي اصغر من الناتج

1 $\cos(\frac{13\pi}{4})$

المقام = 4

ضعف المقام = 8

$$\cos(\frac{13\pi}{4}) = \cos(\frac{13\pi}{4} - 2\pi) = \cos(\frac{5\pi}{4}) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{array}{r|l} & 3.25 \\ 4 & 13 \\ & 12 \\ \hline & 10 \\ & 8 \\ \hline & 20 \\ & 20 \\ \hline & 00 \end{array}$$

2 $\cos(\frac{19\pi}{6})$

المقام = 6

ضعف المقام = 12

$$\cos\frac{19\pi}{6} = \cos(\frac{19\pi}{6} - 2\pi) = \cos\frac{7\pi}{6} = \frac{-1}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} & 3.1 \\ 6 & 19 \\ & 18 \\ \hline & 10 \\ & 6 \\ \hline & 4 \end{array}$$

3 $\cos(\frac{16\pi}{3})$

المقام = 3

ضعف المقام = 6

$$\cos(\frac{16\pi}{3}) = \cos(\frac{16\pi}{3} - 4\pi) = \cos\frac{4\pi}{3} = \frac{-1}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} & 5.3 \\ 3 & 16 \\ & 15 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 1 \end{array}$$

4 $\cos(\frac{49\pi}{4})$

المقام = 4

ضعف المقام = 8

$$\cos(\frac{49\pi}{4}) = \cos(\frac{49\pi}{4} - 12\pi) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{array}{r|l} & 12.25 \\ 4 & 49 \\ & 4 \\ \hline & 9 \\ & 8 \\ \hline & 10 \\ & 8 \\ \hline & 20 \end{array}$$

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

س جد القياس الرئيسي للزاوية $(\frac{49\pi}{4})$

$$(\frac{49\pi}{4}) \Rightarrow (\frac{49\pi}{4} - 12\pi) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

القياس الرئيسي للزاوية $\frac{49\pi}{4}$ هو $\frac{\pi}{4}$

رابعاً: اذا كانت الزاوية سالبة والبسط اكبر من ضعف المقام

① $\sin(\frac{-13\pi}{6})$

$$\sin(\frac{-13\pi}{6}) = \sin(\frac{-13\pi}{6} + 4\pi)$$

$$= \sin(\frac{11\pi}{6})$$

$$= \boxed{\frac{-1}{2}}$$

$6 \overline{)13}\ 2,1$
12
10
6
4

② $\sin(\frac{-17\pi}{3})$

$$\sin(\frac{-17\pi}{3}) = \sin(\frac{-17\pi}{3} + 6\pi)$$

$$= \sin(\frac{\pi}{3})$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

س جد ناتج :

① $\tan(\frac{5\pi}{3})$

$$\tan(\frac{5\pi}{3}) = \frac{\sin\frac{5\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{3}}$$

$$= \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{+\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1}$$

$$= \boxed{-\sqrt{3}}$$

② $\tan(\frac{4\pi}{3})$

$$\sin(\frac{4\pi}{3}) = \frac{\sin\frac{4\pi}{3}}{\cos\frac{4\pi}{3}}$$

$$= \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{-1}$$

$$= \boxed{+\sqrt{3}}$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

دوال دائرية اخرى

$\sin x \ , \ \cos x \ , \ \tan x$

$\csc x \ , \ \sec x \ , \ \cot x$

قوانين المجموعة الاولى :

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$\csc x$ هي مقلوب $\sin x$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$\sec x$ هي مقلوب $\cos x$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \ , \ \cot x \frac{\cos x}{\sin x}$$

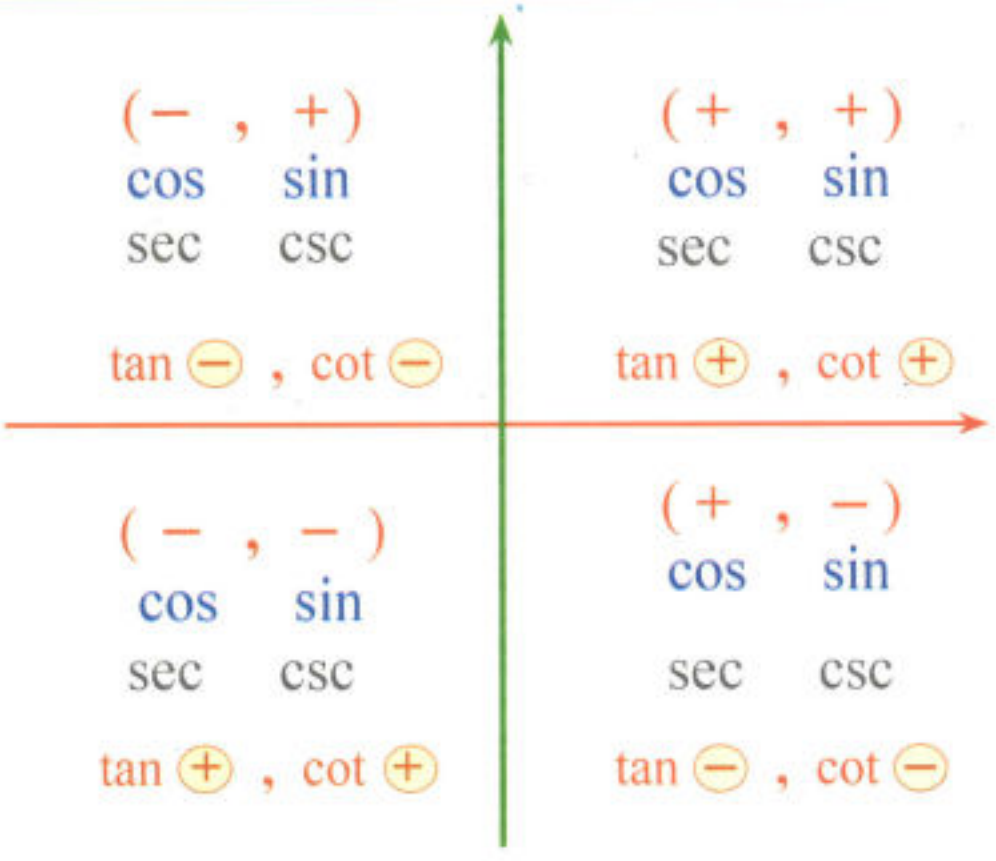
$\cot x$ هو مقلوب $\tan x$

قوانين المجموعة الثانية :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$



شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

س 1 اذا كان $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ وكان $\sin x = \frac{5}{13}$ جد :

$(\cos x \ , \ \tan x \ , \ \cot x \ , \ \sec x \ , \ \csc x)$

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$

90° ← الربع الثاني ← 180°

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$(\frac{5}{13})^2 + \cos^2 x = 1$

$\frac{25}{169} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{25}{169}$

$\cos^2 x = \frac{169 - 25}{169}$

$\cos^2 x = \frac{144}{169}$ (بالجذر التربيعي)

$\cos x = \mp \frac{12}{13}$

(x) تقع في الربع الثاني / اشارة cos x هي سالبة

$\cos x = -\frac{12}{13}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan x = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{-12}{13}}$

$\tan x = \frac{5}{\cancel{13}} \times \frac{\cancel{13}}{-12}$

$\tan x = -\frac{5}{12}$

$\csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \csc x = \frac{13}{5}$

$\csc x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \csc x = \frac{-13}{12}$

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$

cot x هو مقلوب tan x

$\cot x = \frac{-12}{5}$

(الخلاصة)

1) اعطى sin x

2) وجدنا cos x بالقانون

3) وجدنا tan x بالقانون

sin x	,	cos x	,	tan x
⇓		⇓		⇓
نقلب		نقلب		نقلب
csc x		sec x		cot x

Telegram : @SadsHelp

س 2 اذا كان $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ وكان $\cos x = \frac{2}{3}$ جد قيمة كل مما يأتي:

$(\sin x\ ,\ \tan x\ ,\ \cot x\ ,\ \sec x\ ,\ \csc x)$

$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

270° ← نقع في الربع الثاني ← 360°

$\cos x = \frac{2}{3}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x + (\frac{2}{3})^2 = 1$

$\sin^2 x + \frac{4}{9} = 1$

$\sin^2 x = 1 - \frac{4}{9}$

$\sin^2 x = \frac{9-4}{9} \Rightarrow \sin^2 = \frac{5}{9}$

$\sin x = \mp\frac{\sqrt{5}}{3}$

(x) تقع في الربع الرابع / اشارة $\sin x$ هي سالبة

$\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan x = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}}$

$\tan x = \frac{-\sqrt{5}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{2}$

$\tan x = \frac{-\sqrt{5}}{2}$

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$

$\cot x = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ → $\cot x$ هو مقلوب $\tan x$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\sec x = \frac{3}{2}$ → $\sec x$ هو مقلوب $\cos x$

$\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$\csc x = \frac{-3}{\sqrt{5}}$

$\csc x$ هو مقلوب $\sin x$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

س 3 اذا كان $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ وكان $\tan x = \frac{7}{3}$ جد قيمة: $(\csc x \ , \ \sec x \ , \ \cot x)$

$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

$180^\circ \rightarrow$ الربع الثالث $\leftarrow 270^\circ$

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$

$(\frac{7}{3})^2 + 1 = \sec^2 x$

$\frac{49}{9} + 1 = \sec^2 x \Rightarrow \frac{49+9}{9} = \sec^2 x$

$\sec^2 x = \frac{58}{9}$ بالجذر $\Rightarrow \boxed{\sec^2 x = \mp \frac{\sqrt{58}}{3}}$

(x) تقع في الربع الثالث / اشارة $\sec x$ هي سالبة

$\boxed{\sec x = -\frac{\sqrt{58}}{3}}$

$\cot x = \frac{1}{\tan x}$

$\boxed{\cot x = \frac{3}{7}}$

$\tan x$ هو مقلوب $\cot x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

$1 + (\frac{3}{7})^2 = \csc^2 x$

$1 + \frac{9}{49} = \csc^2 x$

$\frac{49+9}{49} = \csc^2 x$

$\csc^2 x = \frac{58}{49}$

$\csc x = \mp \frac{\sqrt{58}}{7}$

$\csc x = -\frac{\sqrt{58}}{7}$

Telegram : @SadsHelp

س 1 اثبت صحة المتطابقة :

$$\tan x = \sin x \cdot \sec x$$

الطرف الايسر $= \sin x \cdot \sec x$

$$= \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{1} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x =$$ الطرف الايمن

س 2 اثبت صحة المتطابقة :

$$\frac{1-\cos^2 x}{\tan x} = \sin x \cdot \cos x$$

الطرف الايسر $= \dfrac{1-\cos^2 x}{\tan x}$

$$= \frac{\sin^2 x}{\tan x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \sin^2 x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

$= \sin x \cdot \cos x =$ الطرف الايمن

س 3 اثبت صحة المتطابقة :

$$\sec^2 x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1-\sin^2 x}$$

الطرف الايسر $= \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1-\sin^2 x}$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$= \sec^2 x =$ الطرف الايمن

س 4 اثبت صحة المتطابقة :

$$(1-\sin^2 x)(1+\tan^2 x) = 1$$

الطرف الايسر $= (1-\sin^2 x)(1+\tan^2 x)$

$$= (\cos^2 x)(\sec^2 x)$$

$$= \cancel{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos^2 x}}$$

$= 1 =$ الطرف الايمن

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

س 5 اثبت صحة المتطابقة :

$$\frac{1+\sin x-\sin^2 x}{\cos x}=\cos x+\tan x$$

الطرف الايسر $=\dfrac{1+\sin x-\sin^2 x}{\cos x}$

$=\dfrac{1-\sin^2 x+\sin x}{\cos x}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin x}{\cos x}$

$=\dfrac{\cos^2 x}{\cos x}+\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$=\cos x+\tan x$ = الطرف الايمن

س 6 اثبت صحة المتطابقة :

$$\frac{3\cos^2 x-\sin^2 x+1}{\sin^2 x}=4\cot^2 x$$

الطرف الايسر $=\dfrac{3\cos^2 x-\sin^2 x+1}{\sin^2 x}$

$=\dfrac{3\cos^2 x+1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$

$=\dfrac{3\cos^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}$

$=\dfrac{4\cos^2 x}{\sin^2 x}$

$=4\cot^2 x$ = الطرف الايمن

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية ، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق ، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

WARNING تحذير هام جدا

Telegram : @SadsHelp

س 7 اثبت صحة المتطابقة :

$$\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \ . \ \tan x$$

الطرف الايسر $= \sec^2 x + \csc^2 x$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \ . \ \sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x \ . \ \sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}$$

الطرف الايمن $= \sec^2 x \ . \ \csc^2 x =$

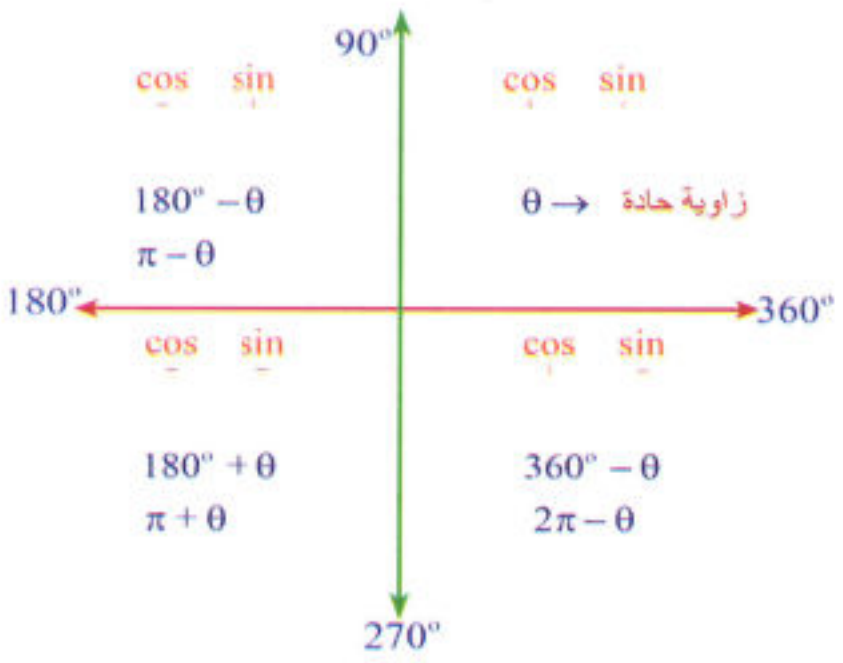
أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية ، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق ، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد وإجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.
لذا اقتضى التنويه والتحذير

WARNING تحذير هام جداً

Telegram : @SadsHelp

الزاوية المنتسبة :

هي الزاوية التي تأخذ قيم الدوال الدائرية لزوايا حادة مثل (30° , 60° , 45°) بنفس الاشارة او عكس الاشارة .



مثلاً : الزاوية 150° هي زاوية منتسبة للزاوية 30°

مثلاً : الزاوية 300° هي زاوية منتسبة للزاوية 60°

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

اولا : تعبير $360^\circ, 180^\circ$ هو تعبير للزاوية يتم الاحتفاظ بنفس الدالة

$\sin x \to \sin x$ $\quad \tan x \to \tan x$ $\quad \sec x \to \sec x$

$\cos x \to \cos x$ $\quad \cot x \to \cot x$ $\quad \csc x \to \csc x$

س 1 أحسب :

1 $\cos 150^\circ$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ)$$
$$= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 $\sin 150^\circ$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ)$$
$$= +\sin 30^\circ = +\frac{1}{2}$$

3 $\cos 330^\circ$

$$\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ)$$
$$= +\cos 30^\circ$$
$$= +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4 $\sin 210^\circ$

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ)$$
$$= -\sin 30^\circ$$
$$= -\frac{1}{2}$$

Telegram : @SadsHelp

5 $\cos 360^\circ$

$$\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ)$$
$$= + \cos 60^\circ$$
$$= +\frac{2}{1}$$

6 $\cos 360^\circ$

$$\sec 330^\circ = \sec(180^\circ - 30^\circ)$$
$$= - \sec 30^\circ$$
$$= \frac{-2}{1}$$

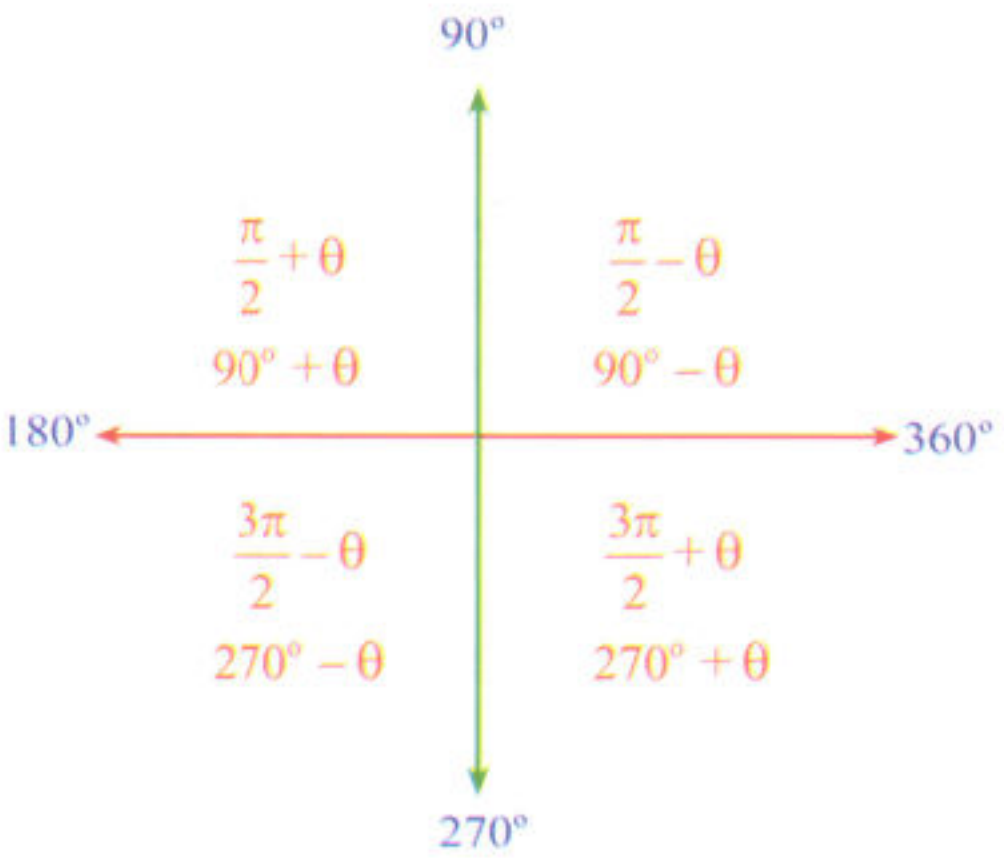
7 $\csc 330^\circ$

$$\csc 330^\circ = \csc(360^\circ - 30^\circ)$$
$$= - \csc 30^\circ$$
$$= -\frac{2}{1}$$
$$= -2$$

8 $\tan 210^\circ$

$$\tan 210^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ)$$
$$= + \tan 30^\circ$$
$$= +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ثانياً : تعبير $270^\circ, 90^\circ$ هذا التعبير يقلب الدالة



$\sin \Rightarrow \cos$

$\cos \Rightarrow \sin$

$\tan \Rightarrow \cot$

$\sec \Rightarrow \csc$

$\csc \Rightarrow \sec$

$\cot \Rightarrow \tan$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

س 2 أحسب :

1 $\cos 150^\circ$

$$\cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ)$$
$$= -\sin 60^\circ$$
$$= \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

2 $\sin 150^\circ$

$$\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ)$$
$$= +\cos 60^\circ$$
$$= \frac{1}{2}$$

3 $\cos 330^\circ$

$$\cos 330^\circ = \cos(270^\circ + 60^\circ)$$
$$= +\sin 60^\circ$$
$$= +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4 $\cos 135^\circ$

$$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ)$$
$$= -\sin 45^\circ$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

5 $\sec 210^\circ$

$$\sec 210^\circ = \sec(270^\circ - 60^\circ)$$
$$= -\csc 60^\circ$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

6 $\tan 330^\circ$

$$\tan 330^\circ = \tan(270^\circ + 60^\circ)$$
$$= -\cot 60^\circ$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

Telegram : @SadsHelp

تمارين (4 - 4)

س 1 اذا كان $\sin\theta = \frac{-8}{17}$, θ

تقع في الربع الثالث جد :

1 $\cos\theta$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$(\frac{-8}{17})^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\frac{64}{289} + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \frac{64}{289}$$

$$\cos^2\theta = \frac{289 - 64}{289}$$

$$\cos^2\theta = \frac{225}{289}$$ بالجذر التربيعي

$$\cos\theta = \mp\frac{15}{17}$$

لان θ تقع في الربع الثالث

$$\cos\theta = \frac{-15}{17}$$

2 $\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta)$

$$\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sin\theta$$

$$= -(\frac{-8}{17})$$

$$= \frac{8}{17}$$

3 $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = +\cos\theta$$

$$= -(-\frac{15}{17})$$

$$= -\frac{15}{17}$$

Telegram : @SadsHelp

س 2 اذا كان $\cos\beta = 0.8$ حيث $270^\circ < \beta < 360^\circ$ جد :

$\cos\beta = \frac{4}{5}$

1 $\sin\beta$

$\sin^2\beta + \cos^2\beta =$

$\sin^2\beta + (\frac{4}{5})^2 = 1$

$\sin^2\beta + \frac{16}{25} = 1$

$\sin^2\beta = 1 - \frac{16}{25}$

$\sin^2\beta = \frac{25-16}{25}$

$\sin^2\beta = \frac{9}{25}$ بالجذر التربيعي

$\sin\beta = \mp\frac{3}{5}$

cos sin

β تقع في الربع الرابع $(+ , -)$

$\sin\beta = -\frac{3}{5}$

2 $\cos(270^\circ + \beta)$

$\cos(270^\circ + \beta) = +\sin\beta$

$= +(\frac{-3}{5})$

$= -\frac{3}{5}$

3 $\cos(270^\circ - \beta)$

$\cos(270^\circ - \beta) = -\sin\beta$

$= -(\frac{-3}{5}) = \frac{3}{5}$

تحذير هام جدا WARNING

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية ، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق ، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.

لذا اقتضى التنويه والتحذير

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

س 3 اذا كان $\sin\alpha = \frac{24}{25}$ حيث $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ احسب قيمة

$$\sin(90^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha) + \cos 120^\circ$$

$\sin \alpha = \frac{24}{25}$
$\alpha \leftarrow$ الربع الثاني
cos sin

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$(\frac{24}{25})^2 + \cos^2\alpha = 1$$
$$\frac{576}{625} + \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{576}{625}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{625 - 576}{625}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{49}{625}$$ بالجذر التربيعي
$$\cos\alpha = \mp\frac{7}{25}$$
$$\cos\alpha = \frac{-7}{25}$$

لان α تقع في الربع الثاني

$$\sin(90^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha) + \cos 120^\circ$$
$$= +\cos\alpha - (-\cos\alpha) + \cos(180^\circ - 60^\circ)$$
$$= \cos\alpha + \cos\alpha + (-\cos 60^\circ)$$
$$= \frac{-7}{25} + \frac{-7}{25} + \frac{-1}{2}$$
$$= \frac{-14 + (-14) + (-25)}{50}$$
$$= \frac{-53}{50}$$

تحذير هام جدا WARNING

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية ، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق ، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لانخول شرعاً وقانونا استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.
لذا اقتضى التنويه والتحذير

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

س 4

اثبت ان : $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta).\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)-\sin(\pi+\theta).\sin(\pi-\theta)=0$

الطرف الايسر

$=(-\sin\theta)\quad(\sin\theta)\quad-\quad(-\sin\theta)\quad(\sin\theta)$

$=-\sin^2\theta+\sin^2\theta$

$=0=$ الطرف الايمن

س 5 حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية (α) اذا كان :

(a) $\sin\alpha > 0$ (اكبر) , $\cos\alpha > 0$ (اكبر) $\rightarrow (+,+)$ (cos sin) $\rightarrow$ الربع الاول

(b) $\sin\alpha > 0$ (اكبر) , $\cos\alpha < 0$ (اصغر) $\rightarrow (-,+)$ (cos sin) $\rightarrow$ الربع الثاني

(c) $\sin\alpha < 0$ (اصغر) , $\cos\alpha < 0$ (اصغر) $\rightarrow (-,-)$ (cos sin) $\rightarrow$ الربع الثالث

(d) $\sin\alpha < 0$ (اصغر) , $\cos\alpha > 0$ (اكبر) $\rightarrow (+,-)$ (cos sin) $\rightarrow$ الربع الرابع

Telegram : @SadsHelp

س 6 اي العبارات الاتية صحيحة وايهما خاطئة :

1 $\sin 270^\circ = 2\sin 30^\circ$

الطرف الايسر $= \sin 270^\circ = \boxed{-1}$

$= 2\sin 30^\circ$

الطرف الايمن $= 2(\frac{1}{2}) = \boxed{1}$

الطرف الايمن ≠ الطرف الايسر

العبارة خاطئة

2 $\sin 90^\circ = 2\cos 60^\circ$

الطرف الايسر $= \sin 90^\circ = \boxed{1}$

$= 2\cos 60^\circ$

الطرف الايمن $= 2(\frac{1}{2}) = \boxed{1}$

الطرف الايمن - الطرف الايسر

العبارة صحيحة

3 $\cos 150^\circ = \frac{1}{2}\tan 120^\circ$

الطرف الايسر $= \cos 150^\circ$

$= \cos(180^\circ - 30^\circ)$

$= -\cos 30^\circ = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\tan 120^\circ$

$= \tan(180^\circ - 60^\circ)$

$= \tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

$= \frac{1}{2}\tan 120^\circ$

الطرف الايمن $= \frac{1}{2}(-\sqrt{3}) = \boxed{\frac{-\sqrt{3}}{2}}$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

العبارة صحيحة

4 $\cos(30^\circ + 60^\circ) = \cos 30^\circ + \cos 60^\circ$

$= \cos(30^\circ + 60^\circ)$

الطرف الايسر $= \cos 90^\circ = \boxed{0}$

$= \cos 30^\circ + \cos 60^\circ$

الطرف الايمن $= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

العبارة خاطئة

الطرف الايمن ≠ الطرف الايسر

Telegram : @SadsHelp

س 7 اثبت ان :

1 $\sin(90^\circ+\alpha)+\cot(270^\circ-\alpha)+\cos(180^\circ+\alpha)\tan\alpha$

الطرف الايسر $= \cancel{\cos\alpha} + \tan\alpha + (-\cancel{\cos\alpha})$

$= \tan\alpha =$ الطرف الايمن

---

2 $\sin^2 130^\circ = \frac{1}{2}(1-\cos 270^\circ)$

$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ)$

$= +\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2}(1-0)$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

Telegram : @SadsHelp

الدوال الدائرية لفرق او مجموع

اولاً : دالة الـ COS في الفرق والمجموع

قانون حفظ

$$\cos(x_2 - x_1) = \cos x_2 \cos x_1 + \sin x_2 \sin x_1$$

قانون حفظ

$$\cos(x_2 + x_1) = \cos x_2 \cdot \cos x_1 - \sin x_2 \cdot \sin x_1$$

س 1 أحسب :

1) $\cos 15^\circ$

$\cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ . \sin 30^\circ$

$= (\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2})$

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

2) $\cos 75^\circ$

$\cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ . \sin 30^\circ$

$= (\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) - (\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2})$

$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

Telegram : @SadsHelp

ثانياً: دالة الـ sin في الفرق والمجموع

قانون حفظ

$$\sin(x_2 + x_1) = \sin x_2 \cos x_1 + \cos x_2 \cdot \sin x_1$$

قانون حفظ

$$\sin(x_2 + x_1) = \sin x_2 \cdot \cos x_1 + \cos x_2 \cdot \sin x_1$$

س 1 أحسب :

1 $\sin 15^\circ$

$$\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ . \sin 30^\circ$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) - (\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

---

2 $\sin 75^\circ$

$$\sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ . \sin 30^\circ$$

واجب

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \rightarrow \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

ملاحظة:
لو طلب $\csc 75^\circ$
فهو مقلوب $\sin 75^\circ$

$$\csc 75^\circ = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$$

ثالثاً: دالة الـ tan في الفرق والمجموع

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \cdot \tan x_2} \qquad \tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \cdot \tan x}$$

س 1 أحسب :

1) $\tan 15^\circ$

$$\tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - (1)(\frac{1}{\sqrt{3}})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

2) $\tan 75^\circ$

$$\tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + (1)(\frac{1}{\sqrt{3}})}$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

Telegram : @SadsHelp

قوانين ضعف الزاوية

قوانين المجموعة الثالثة

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

س 1 اذا كان $\sin\alpha = \frac{4}{3}$ احسب : $0 < \alpha < 90^\circ$

$\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(\frac{4}{5})^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{16}{25} + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$

$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$

$\cos\alpha = \mp\frac{3}{5}$ بالجذر التربيعي

$\cos\alpha = +\frac{3}{4}$ → لان (α) تقع في الربع الثالث

1 $\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

2 $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$= (\frac{3}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2$

$= \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \frac{-7}{25}$

3 $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{-24}{7}$

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

س 2 اذا كان $\tan x = \frac{3}{4}$ وكانت $0 < x < 90^\circ$ احسب

$\sin 2x \ , \ \cos 2x \ , \ \tan 2x$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + (\frac{3}{4})^2 = \sec^2 x$

$1 + \frac{9}{16} = \sec^2 x$

$\frac{25}{16} = \sec^2 x$ بالجذر التربيعي

$\sec x = \mp \frac{5}{4}$

$\sec x = \frac{5}{-} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{-}$

$4 \qquad 5$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x + (\frac{4}{5})^2 = 1$

$\sin^2 x + \frac{16}{25} = 1$

$\sin^2 x = 1 - \frac{16}{25}$

$\sin^2 x = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin x = \mp \frac{3}{5}$

$\sin x = \frac{3}{5}$ لان x تقع في الربع الاول

① $\sin 2x$

$\sin 2x = 2 \ . \sin x \ . \cos x$

$= 2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5})$

$= \frac{24}{25}$

② $\cos 2x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = (\frac{4}{5})^2 - (\frac{3}{5})^2$

$\cos 2x = \frac{16}{25} - \frac{9}{25}$

$\cos 2x = \frac{7}{25}$

③ $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\tan 2x = \frac{2(\frac{3}{4})}{1 - (\frac{3}{4})^2}$

$\tan 2x = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}$

$\tan 2x = \frac{3}{2} \times \frac{16}{7}$

$\tan 2x = \frac{24}{7}$

Telegram : @SadsHelp

المعادلات المثلثية : هي جملة مفتوحة تحوي دالة مثلثية واحدة او اكثر لزاوية معينة او عدة زوايا .

النوع الاول : المعادلات المثلثية البسيطة

1 من نوع $\sin x = \sin \theta$

أما $x = \theta$

أو $x = 180 - \theta$

إنتبه

اشارة $\sin \theta$ ← (+)

اما ربح اول او ربح ثاني

س 1 حل المعادلة

1 $\sin x = \sin 45^\circ$

$\sin x = \sin 45^\circ$

أما $x = 45^\circ$

أو $x = 180^\circ - 45^\circ \Rightarrow \boxed{x = 135^\circ}$

$\varsigma = \{45^\circ , 135^\circ\}$

2 $\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \sin 30^\circ$

أما $x = 30^\circ$

أو $x = 180^\circ - 30^\circ \Rightarrow \boxed{x = 150^\circ}$

$\varsigma = \{30^\circ , 150^\circ\}$

3 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x = \sin 60^\circ$

أما $x = 60^\circ$

أو $x = 180^\circ - 60^\circ \Rightarrow \boxed{x = 120^\circ}$

$\varsigma = \{60^\circ , 120^\circ\}$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

2 من نوع $\cos x = \cos\theta$

أما $x = \theta$

أو $x = 360^\circ - \theta$

انتبه

اشارة $\cos\theta$ ← (+)

اما ربع اول او ربع رابع

س 2 حل المعادلة

1) $\cos x = \cos 75^\circ$

$\cos x = \cos 75^\circ$

أما $x = 75^\circ$

أو $x = 360^\circ - 75^\circ \Rightarrow x = 285^\circ$

$\varsigma = \{75^\circ , 285^\circ\}$

---

2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos x = \cos x \ 45^\circ$

أما $x = 45^\circ$

أو $x = 360^\circ - 45^\circ \Rightarrow x = 315^\circ$

$\varsigma = \{45^\circ , 315^\circ\}$

3) $\cos x = \frac{-1}{2}$

انتبه

هنا اشارة الـ cos سالبة اي ان الزاوية (x) تقع اما في الربع الثاني او الثالث

$\cos x = \frac{-1}{2}$

زاوية الاسناد $= 60^\circ$

الربع الثاني ← أما $x = 180^\circ - 60^\circ$

$x = 120^\circ$

الربع الثالث ← أو $x = 180^\circ + 60^\circ$

$x = 240^\circ$

$\varsigma = \{120^\circ , 240^\circ\}$

س واجب حل المعادلة

$\cos x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

ج ← $\varsigma = \{225^\circ , 135^\circ\}$

Telegram : @SadsHelp

3 من نوع $\tan x = \tan \theta$

أما $x = \theta$

أو $x = 180^\circ + \theta$

انتبه

اشارة $\tan \theta$ موجبة

اما ربح اول او ربح ثالث

س 3 حل المعادلة

1 $\tan x = \tan 53^\circ$

أما $x = 53^\circ$

أو $x = 180^\circ + 53^\circ$

$x = 233^\circ$

$\varsigma = \{53^\circ , 233^\circ\}$

---

2 $\tan x = \sqrt{3}$

$\tan x = \tan 60^\circ$

أما $x = 60^\circ$

أو $x = 180^\circ + 60^\circ$

$x = 240^\circ$

$\varsigma = \{60^\circ , 240^\circ\}$

---

3 $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan x = \tan 30^\circ$

أما $x = 30^\circ$

أو $x = 180^\circ + 30^\circ$

$x = 210^\circ$

$\varsigma = \{30^\circ , 210^\circ\}$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

افكار اخرى من المعادلات المثلثية

س 1 حل المعادلة

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

$$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$$

أما $\cos x + 2 = 0 \Rightarrow \cos x = -2$

تهمل $-1 \leq \cos x \leq 1$

أو $2\cos x - 1 = 0$

$$[2\cos x = 1] \div 2$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

زاوية الاسناد $= 60^\circ$

أما الربع الاول $x = 60^\circ$

أو الربع الرابع $x = 360^\circ - 60^\circ$

$$x = 300^\circ$$

$$\varsigma = \{60^\circ, 300^\circ\}$$

س 2 حل المعادلة

$$\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0$$

$$(\tan x + 1)(\tan x + 1) = 0$$

$$\tan x + 1 = 0$$

$$\tan x = -1$$

زاوية الاسناد $= 45^\circ$

اشارة $\tan x$ سالبة
(ربع ثاني و ربع رابع)

أما الربع الثاني $x = 180^\circ - 45^\circ$

$$x = 135^\circ$$

أو الربع الرابع $x = 360^\circ - 45^\circ$

$$x = 315^\circ$$

$$\varsigma = \{135^\circ, 315^\circ\}$$

أن مطبعة المغرب (ملازم دار المغرب) هي دار نشر قانونية مثبتة لدى وزارة الصناعة وحائزة على ماركة تجارية مسجلة في قسم العلامات والبيانات التجارية ، وعليه نحذر من عملية التلاعب بطباعة مؤلفاتنا واستنساخها أو نشرها على الانترنت، فهناك عقوبات بحق هذا التجاوز والتعدي على طباعتنا وجهدنا وفق القانون العراقي المرقم ٢١ لسنة ١٩٥٧ والمعدل برقم ٨٠ في سنة ٢٠٠٤ وللمحكمة حق مصادرة المنتجات المخالفة والبضائع وعنوان المكتبة ووسائل التغليف والأوراق ، وتذكر أن كل ما بين يديك هو جهد واجتهاد شخصي من الاستاذ والمطبعة وفق الإتفاق المبرم، وعليه لا نخول شرعاً وقانوناً استنساخ أو نشر الملزمة أو أي جزء منها.
لذا اقتضى التنويه والتحذير

WARNING تحذير هام جدا

Telegram : @SadsHelp

س 3 حل المعادلة

$$\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\cos x(\cos x - 1) = 0$$

أما $\cos x = 0$

$x = 90^\circ$, $x = 270^\circ$

أو $\cos x - 1 = 0$

$$\cos x = 1$$

$x = 0$, $x = 360^\circ$

س 4 حل المعادلة

$$\tan 4x + \cot x = 0$$

حيث $0 < x < 90^\circ$

أما الربح الثاني $\tan 4x = -\cot x$

$$\tan x4x = \tan x(90^\circ + x)$$

$$4x = 90^\circ + x$$

$$4x - x = 90^\circ$$

$$3x = 90^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$

أو الربح الرابع

$$\tan 4x = \tan(270^\circ + x)$$

$$4x = 270^\circ + x$$

$3x = 270^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$ تهمل

$$ς = \{30^\circ\}$$

س 5 حل المعادلة

$$\tan 2x = 3\tan x$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

س 6 حل المعادلة

$$\sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

س 7 حل المعادلة

$$\cos 4x = \cos(x + \pi)$$

س 8 حل المعادلة

$$\tan 4x - \cot x = 0$$

Telegram : @SadsHelp

س 9 حل المعادلة

$$\cos^3 x = \sin^3 x$$

س 10 حل المعادلة

$$2\sin^2 x = \cos 2x(4\sin 2x - 1)$$

س 11 حل المعادلة

$$\sin x + \cos x = 1$$

Telegram : @SadsHelp

س 12 حل المعادلة

$$\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

س 13 حل المعادلة

$$\cos x = \sqrt{2}\,\sin^2 x$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

س 14 حل المعادلة

$$\sqrt{3}\ \sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

س 15 حل المعادلة

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\ \sin x\ \cos x + 3\cos^2 x = 3$$

Telegram : @SadsHelp

رسم منحنيات الدوال المثلثية

اولاً : رسم منحني جيب الزاوية $y = \sin x$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

ثانياً : رسم منحني جيب تمام الزاوية $(y = \cos x)$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

ثالثاً : رسم منحني الظل $(y = \tan x)$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

رابعاً : رسم منحني ظل التمام $y = \cot x$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

خامساً : رسم منحني القاطع $y = \sec x$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سادساً : رسم منحني قاطع تمام ($y = \csc x$)

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

5

MATHEMATIC

المُسند في الرياضيات

الاستاذ حيدر وليد

الخامس العلمي

الفصل الخامس

الغاية والاستمرارية

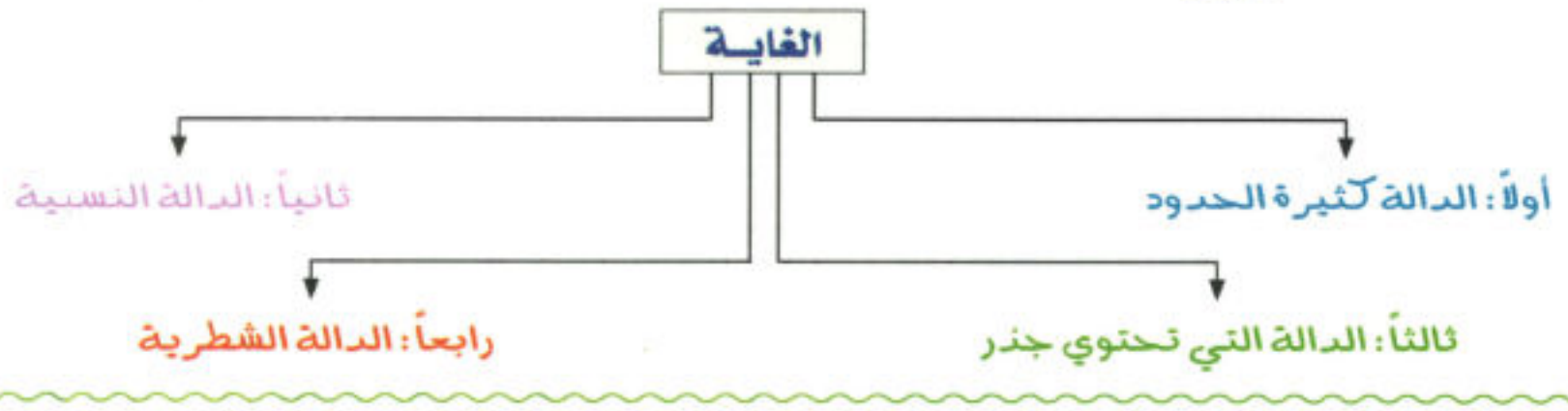
الاستاذ حيدر وليد
π
دار المغرب للطباعة والنشر

ملازم دار المغرب
077 100 55555
Mob: 6561

Telegram : @SadsHelp

الغاية

الغاية $\lim_{x \to a}$



أولاً: الدالة كثيرة الحدود: هي الدالة التي لا تحتوي x بالمقام ولا تحتوي جذر لايوجد x تحت الجذر ذات اس موجبة .

دوال كثيرة الحدود

$$f(x) = x^2 + 5x + 7$$
$$f(x) = 3x^3 + x$$
$$f(x) = x^5 - 3x^2 + 7x$$

* التعويض مباشرة بقيمة X .

سؤال جد الغاية لكل مما يأتي :

لو نجي انلاحظ دالة كثيرة الحدود :

1. ماكو x بالمقام .
2. ماعندك x جوى الجذر .

فنعوض بكان x مباشرة

1 $\lim_{x \to 1} (3x - 4)$

$= 3(1) - 4$

$= 3 - 4 = -1$

---

2 $\lim_{x \to -1} (x^2 + 3x)$

$= (-1)^2 + 3(-1)$

$= +1 - 3 = -2$

---

3 $\lim_{x \to -1} x^3 - 3x^2 + 5x - 2$

$= (-1)^3 - 3(-1)^2 + 5(-1) - 2$

$= -1 - 3 - 5 - 2$

$= -1$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

ثانياً: الدالة النسبية: هي الدالة التي تحوي x بالمقام.

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{5x+2}{3x-5}$$

ملاحظة رقم (1)

إذا جاء في السؤال دالة نسبية نعوض قيمة x فإذا اصبح **المقام** صفراً نلجأ إلى التحليل ثم الاختصار بعدها نعوض مرة اخرى.

اما إذا كان المقام لا يساوي صفراً لا نحلل ونكمل الحل.

سؤال جد الغاية لكل مما يأتي:

1 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2-4}{x-1}$

أولاً نعوض قيمة x في الدالة.

$$=\frac{2(-2)^2-4}{-2-1}=\frac{8-4}{-3}=\frac{4}{-3}$$

$\frac{4}{-3}$ ترى هو نفسه

$\frac{-4}{3}$

$-\frac{4}{3}$ أو نفسه (بس الأس من يصعد تتغير اشارته)

2 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

نعوض بمكان $x \leftarrow 2$

$$=\frac{(2)^2-2+1}{2-1}=\frac{4-2+1}{1}$$

$$=\frac{3}{1}=3$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

نحلل ونختصر ونعوض

* إذا شفنة اشارة الأخير سالبة
(-)(+)
يعني انخلي اشارات مختلفة

3 $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-1x-6}{x-3}$ نُحلل بالتجربة

$\lim_{x\to 3} \frac{(x+2)(x-3)}{(x-3)}$

$\lim_{x\to 3} x+2$

$=3+2=5$

4 $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$ التجربة — فرق بين مربعين

$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}$

$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x+3} = \frac{3+1}{3+3} = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{2}{3}$

5 $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{2x-2}$

$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{2(x-1)}$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{2}$

$= \frac{(1)^2+1+1}{2} = \frac{3}{2}$

6 $\lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x-a}$

$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x-a)}$

$\lim_{x\to 3} x^2+ax+a^2$

$= a^2+a.a+a^2$

$= 1a^2+1a^2+1a^2$

$= 3a^2$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

أساسيات

أولاً: الفرق بين مربعين:

$$x^2 - 25 = (x+5)\ (x-5)$$

جذور الثاني - جذر الحد الأول

$$x^2 - 1 = (x-1)\ (x+1)$$

$$y^2 - 36 = (y-6)\ (y=6)$$

ثانياً: التجربة:

إذا كانت اشارة الأخير ⊖ نأخذ اشارة الحد الوسط للقوسين

$$x^2 \pm 5x \oplus 4 = (x+4)\ (x+1)$$

$$x^2 - 5x \oplus 6 = (x-3)\ (x-2)$$

إذا كانت اشارة الأخير ⊖ نضع اشارات مختلفة داخل القوسين

$$x^2 \boxed{-7x} - 8 = (x+1)\ (x-8)$$

$$x^2 - 1x - 12 = (x-4)\ (x+3)$$

$$(x+3)\ (x-4)$$

ثالثاً: الفرق بين مكعبين أو مجموع مكعبين:

$$x^3 - 8 = (x-2)\ (x^2 + 2x + 4)$$

جذر الأول — جذر الثاني — دائماً — مربع الحد الثاني — مربع الأول — عكس الاشارة — الأول في الثاني

$$x^3 - 27 = (x-3)\ (x^2 + 3x + 9)$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

الدالة التي تحتوي على جذر

العامل المرافق

$x-\sqrt{3} \Rightarrow x+\sqrt{3}$

$x+\sqrt{5} \Rightarrow x-\sqrt{5}$

أي المرافق هو عكس الاشارة التي تفصل الحدين

$\sqrt{x+2}-1 \Rightarrow \sqrt{x+2}+1$

$2-\sqrt{3+x} \Rightarrow 2+\sqrt{3+x}$

أي بداخل الجذر كُلشي منسويله

الحد الثاني × الثاني ⊖ الحد الأول × الأول = العدد × المرافق
دائماً

1 $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=x^2-3$

2 $(\sqrt{x}\oplus 2)(\sqrt{x}\ominus 2)=x-4$

3 $(\sqrt{3}\ominus\sqrt{x})(\sqrt{3}\oplus\sqrt{x})=3-x$

سؤال 1 جد الغاية :

1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

ملاحظة نضرب البسط والمقام في مرافق الجذر وين مكان هذا الجذر فوك أو جوى .

عملية الضرب تحدث فقط بين العدد والمرافق

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot(\sqrt{x}+1)}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{1}+1}=\dfrac{1}{2}$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

2 $\lim_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$

عملية الضرب اتم فقط بين المترافقات

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}\cdot\frac{x+\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{(x^2-2)}{(x^2-2)\,.\,(x+\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{1}{x+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{1\sqrt{2}+1\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

3 $\lim_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

فرق بين مربعين

$$\lim_{x\to1} \frac{(x^2-1)\,.\,(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}$$

$$\lim_{x\to1} (x+1)\,(\sqrt{x}+1)$$

$$=(1+1)(\sqrt{1}+1)$$

$$=(2)(2)=4$$

4 $\lim_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

5 $\lim_{x\to4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3}$

$$\lim_{x\to4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3}\cdot\frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3}$$

فرق بين مربعين

$$\lim_{x\to4} \frac{(x^2+16)\,.\,\sqrt{x+5}+3}{x+5-9}$$

$$\lim_{x\to4} \frac{(x-4)(x+4)\sqrt{x+5}+3}{(x-4)}$$

$$\lim_{x\to4} (x+4)\,(\sqrt{x+5}+3)$$

$$=(4+4)\,.\,(\sqrt{4+5}+3)$$

$$=(8)\,.(6)=48$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

6 $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

$\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$

$\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-a)}{(x-a).(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$

$\lim_{x\to a} \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2a}$

أسئلة أخرى - دالة نسبية

1 $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2-6x+5}$

$\lim_{x\to 1} \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x-5)}$

$\lim_{x\to 1} \dfrac{x+3}{x-5}$

$= \dfrac{1+3}{1-5} = \dfrac{4}{-4} = -1$

2 $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^4-81}{x^3-27}$ ← فرق بين مربعين ← مكعبين

* كُل اس (4) يتحلل مرتين

مجموع مربعين/لا يحل

$\lim_{x\to 3} \dfrac{(x^2+9)(x^2-9)}{(x-3)(x^2+3x+9)}$ ← فرق مربعين

$\lim_{x\to 3} \dfrac{(x^2+9)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x^2+3x+9)}$

$\lim_{x\to 3} \dfrac{(x^2+9)(x+3)}{x^2+3x+9}$

$= \dfrac{((3)^2+9).(3+3)}{3^2+3\,(3)+9} = \dfrac{(81)(6)}{9+9+9} = \dfrac{(\overset{2}{81}).(\overset{2}{6})}{\overset{3}{27}} = 4$

$(x^4-16) = (x^2+4)(x^2-4)$

$= (x^2+4)(x^2+2)(x+2)$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

الدالة الشطرية

الدالة الشطرية

$$f(x)\begin{cases} x \geq \\ x < \end{cases}$$

* $x \geq 1$ (تُقرأ x أكبر أو تساوي 1)
* $x > 2$ (تُقرأ x أكبر من 2)
* $x < -1$ (تُقرأ x أصغر من 1-)
* $x \leq -2$ (تُقرأ x أصغر أو تساوي 2-)

* غاية اليمين / مح الشطر $\begin{bmatrix} x \geq \\ x > \end{bmatrix}$ أكبر ⊕
* غاية اليسار / مح الشطر $\begin{bmatrix} x \leq \\ x < \end{bmatrix}$ أصغر ⊖

سؤال 1 لتكن

$$F(x) = \begin{matrix} \text{يمين} \\ \left[\begin{matrix} x^2+4 & x \geq 1 \\ 5x & x < 1 \end{matrix}\right. \\ \text{يسار} \end{matrix}$$

جد: (الحد الفاصل)

a $\lim\limits_{x \to ①} f(x)$

b $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

الحل / إذا x تقترب من الحد الفاصل فلازم يتعوض بالشطر الأعلى والشطر الأدنى

1 $\lim\limits_{x \to 1^+} x^2+4$ يمين

$= (1)^2+4$

$= 1+4 = 5 = L_1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} 5x$ يسار

$= 5\ (1) = 5L_2$

$L_1 = L_2$ للدالة غاية عندما $x \to 1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$

2 $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 2} x^2+4$

$= (2)^2+4$

$= 4+4 = 8$

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 2 لتكن

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\geq -1\\ 3x & x<-1\end{cases}$$

أولاً: هل الدالة غاية عند $x\to -1$

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

(الحد الفاصل)

$\lim\limits_{x\to -1^{+}} 2x-1$ يمين/ أكبر

$=2(-1)-1$

$=-2-1=-3=L_1$

$\lim\limits_{x\to -1^{-}} 3x$ يسار/ أصغر

$3(-1)=-3=L_2$

$L_1=L_2$ الغاية موجوة

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-3$

ثانياً: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} 2x-1$

$=2(0)-1$

$=0-1=-1$

ثالثاً: $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -3} 3x$

$=3(-3)=-9$

Telegram : @SadsHelp

ملاحظات

أولاً: عندما يطلب غاية ويقول

$x \to \square$ ← الحد الفاصل

يعوض في الشطرين [فوق / جوة]

ثانياً: عندما يطلب غاية ويقول

$x \to \square$ ← ليس الحد الفاصل

هذا الرقم يعوض

أما ← فوق

أو ← جوة

بحسب الرقم

إذا كان أكبر من الحد الفاصل يعوض بـ $X >$

وإذا كان أصغر من الحد الفاصل يعوض بـ $X <$

سؤال 3 لتكن

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2+1 & x < 1 \\ x^2-2 & x \geq 1 \end{cases}$$

جد 1 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

يمين/ أكبر $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-2$

$= (1)^2-2$

$= 1-2 = \boxed{-1} = L_1$

يسار/ أصغر $\lim\limits_{x\to 1^-} -3x^2+1$

$= -3(1)^2+1$

$= -3+1 = \boxed{-2} = L_2$

$L_1 \neq L_2$

لاتوجد غاية

2 $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -2} -3x^2+1$

$= -3(-2)^2+1$

$= -12+1 = -11$

Telegram : @SadsHelp

سؤال 4

$f : R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & x > -1 \quad \text{يمين} \\ x^2 + 3 & x < -1 \quad \text{يسار} \\ 4 & x = -1 \end{cases}$$

a) أرسم المخطط البياني لهذه الدالة

b) هل للدالة غاية عند $x = -1$ بين ذلك

c) جد $\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x)$

---

b) يمين

$$\lim_{x \to -1^+} 5 - x^2$$
$$= 5 - (-1)^2$$
$$= 5 - 1 = 4 = L_1$$

$$\lim_{x \to -1^-} x^2 + 3$$
$$= (-1)^2 + 3$$
$$= 1 + 3 = 4 = L_2$$

$L_1 = L_2$ للدالة غاية

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 4s$$

---

c)

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x)$$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} 5 - x^2$$

$$= 5 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$$

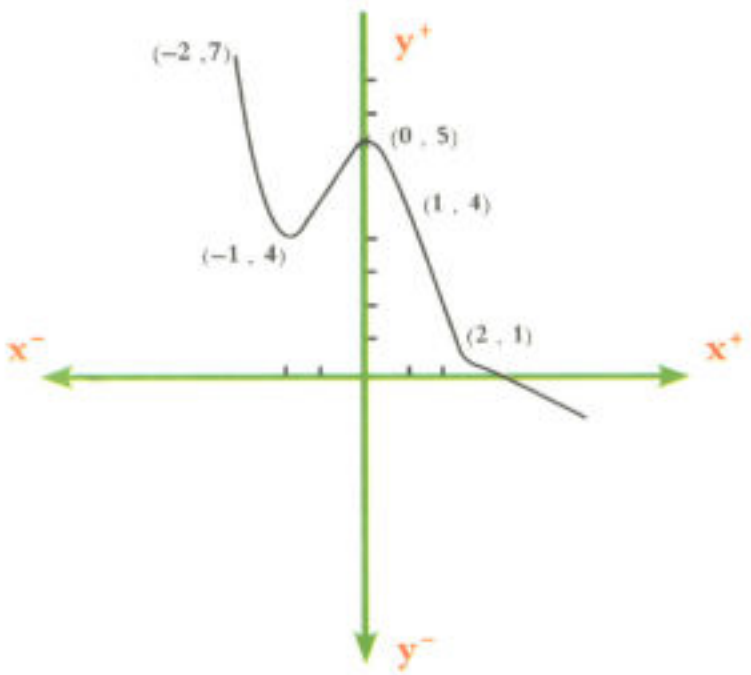
Telegram : @SadsHelp

x	y = f(x)	(x,y)
−2	$f(x) = x^2+3$ $f(-2)=(-2)^2+3$ $=4+3=7$	(−2,7)
−1	$f(x) = 4$ $f(-1)=4$	(−1 , 4)
0	$f(x)=5-x^2$ $f(0)=5-(0)^2$ $=5-0=5$	(0 , 5)
1	$f(x)=5-x^2$ $f(1)=5-(1)^2$ $=5-1=4$	(1 , 4)
2	$f(x)=5-x^2$ $f(2)=5-(2)^2$ $=5-4=1$	(2 , 1)

ارسم المخطط البياني للدالة

نعوض قيم (x) في الدالة

$$f(x)=\begin{cases}5-x^2 & x>-1\\ x^2+3 & x<-1\\ 4 & x=-1\end{cases}$$



سؤال 4 لتكن

$$f(x)=\begin{cases}x^2+a & x>-1 \quad \text{يمين/ أكبر}\\ 6 & x=-1\\ 4x+b & x<-1 \quad \text{يسار/ أصغر}\end{cases}$$

وكانت $\lim_{x\to -1} f(x)=3$ حيث $a,b\in R$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=3$$

$$\lim_{x\to -1^+} x^2+a=3$$

$$=(-1)^2+a=3$$

$$=1+a=3$$

$$a=3-1 \Rightarrow a=2$$

$$\lim_{x\to -1^-} 4x+b=3$$

$$4(-1)+b=3$$

$$-4+b=3$$

$$b=3+4 \Rightarrow b=7$$

Telegram : @SadsHelp

سؤال لتكن

$$f(x)=\begin{cases} bx^2+3 & x \le 2 \quad \text{يسار/ أصغر} \\ c-2x & x > 2 \quad \text{يمين/ أكبر} \end{cases}$$

إذا كانت $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=11$

جد قيمة $b,c \in R$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=11$

$\lim\limits_{x\to 2^+} c-2x=11$ يمين/ أكبر

$c-2(2)=11$

$c-4=11$

$c=11+4 \Rightarrow \boxed{c=15}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} bx^2+3=11$

$b(2)^2+3=11$

$4b+3=11$ يسار/ أصغر

$4b+3=11$

$4b=11-3$

$\frac{4b}{b}=\frac{8}{4} \Rightarrow \boxed{b=2}$

سؤال إذا كان

$F: R \to R$

جد $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$f(x)=|x-1|$

$$f(x)=\begin{cases} +(x-1)=x-1 & x \ge 1 \\ -(x-1)=-x+1 & x < 1 \end{cases}$$

* كل دالة أم المطلق تصير دالة أم الشطرين

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x \ge 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1^+} x-1$ يمين/ أكبر

$=1-1=0=L_1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} -x+1$ يسار/ أصغر

$=-1+1=0=L_2$

للدالة غاية عند $x=1$

$\lim f(x)=0$

Telegram : @SadsHelp

سؤال

$f(x)\ |x-2|$ وكانت $F:R \to R$

جد $\lim_{x\to 2} f(x)$

$$f(x)\begin{cases} +(x-2) = x-2 & x \geq 2 \\ -(x-2) = -x+2 & x < 2 \end{cases}$$

$x-2=0$

$x=2$

$$f(x)\begin{cases} x-2 & x \geq 2 \quad \text{يمين/ أكبر} \\ -x+2 & x < 2 \quad \text{يسار/ أصغر} \end{cases}$$

$\lim_{x\to 2^+} x-2$ يمين/ أكبر

$= 2-2 = 0 = L_1$

$\lim_{x\to 2^-} x+2$ يسار/ أصغر

$= -2+2 = 0 = L_2$

للدالة غاية عند $x=2$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 0$

الملاحظات

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

غاية الدوال الدائرية

شوكت متساوي الزاوية وي المقام
وكانت $x \to 0$
فناتجه=1

مبرهنة (1) $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$

مبرهنة (2) $\lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1$

سؤال جد الغاية لكل مما يأتي :

1 $\lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$

2 $\lim_{x\to0} \frac{\tan 5x}{5x} = 1$

3 $\lim_{x\to0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1$

بحسب المبرهنة

4 $\lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{4x}$

$\frac{3}{4} \lim_{x\to0} \frac{\sin 3x}{3x}$

$= \frac{3}{4}(1) = \frac{3}{4}$

5 $\lim_{x\to0} \frac{\tan 7x}{5x}$

$\frac{7}{5} \lim_{x\to0} \frac{\tan 7x}{7x}$

$= \frac{7}{5}(1) = \frac{7}{5}$

6 $\lim_{x\to0} \frac{\sin 8x}{10x}$

$\frac{8}{10} \lim_{x\to0} \frac{\sin 8x}{8x}$

$\frac{8}{10}(1) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

7 $\lim_{x\to0} \frac{\tan 13x}{2x}$

$\frac{13}{2} \lim_{x\to0} \frac{\tan 3x}{13x}$

$\frac{13}{2}(1) = \frac{13}{2}$

ثلاثة اشياء :
1- انزل
2- ؟؟؟ الرقم
3- انشوف شنو نحتاج

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 6

$$\lim_{x\to0}\left[\sin 2x+\frac{\tan 4x}{6x}\right]$$

تعويض مباشر

$$\lim_{x\to0}\sin 2x+\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x}{6x}$$

$$\lim_{x\to0}\sin 2x+\frac{4}{6}\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x}{4x}$$

$$=\sin 2\,(0)+\frac{4}{6}\,(1)$$

$$=\sin 0+\frac{4}{6}$$

$$=0+\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

الـ lim تتوزع على الحدين

* إذا كان $\begin{pmatrix}\sin x\\ \tan x\\ \cos x\end{pmatrix}$ بدون مقام التعويض مباشر

$$\lim_{x\to0}\tan 3x$$

$$=\tan 0=0$$

$$\lim_{x\to0}\cos 7x$$

$$=\cos 0=1$$

أسئلة الدرجة الثانية

هي التي نحتاج فيها الى قيمة البسط والمقام على x أو على x^2 حسب السؤال .

7 $$\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x+\tan 3x}{\sin 5x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan 4x}{x}+\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}$$

$$4\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{4x}+3\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{3x}$$

$$5\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}$$

$$=\frac{4\,(1)+3\,(1)}{5\,(1)}=\frac{4+3}{5}=\frac{7}{5}$$

* في حالة فقدان عنصر المقام انتة اتوفره
نُقسم كل حد من الحدود على (x)

بحسب المبرهنة

Telegram : @SadsHelp

8 $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin 2x+\tan 3x}{\sin 5x}$

$\lim_{x\to0} \dfrac{\frac{\sin 2x}{x}+\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}$ (توفير المقام)

$2\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}+3\lim_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{3x}$ (توزيع lim على الحدود)

$5\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{5x}$

$\dfrac{2\,(1)+3\,(1)}{5\,(1)}$

$\dfrac{2+3}{5}=\dfrac{5}{5}=1$

9 $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin^2 4x}{x\tan 2x}$

$\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin^2 4x}{x^2}}{\frac{x\tan 2x}{x^2}}$

$\lim_{x\to0}\dfrac{\sin^2 4x}{x^2}$

$\lim_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{x}$

$4\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot 4\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{4x}$

$2\lim_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{2x}$

$\dfrac{(4).(4)}{2}=\dfrac{16}{2}=8$

10 $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\tan 7x}$

$\lim_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin^2 3x}{x^2}}{\frac{x\tan^2 7x}{x^2}}$

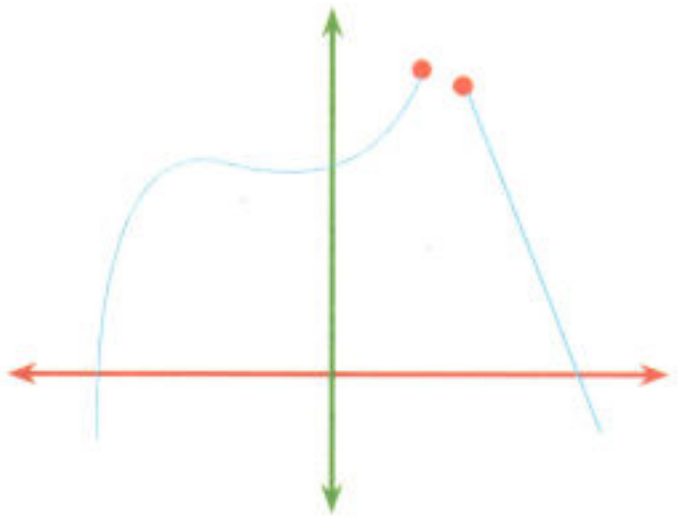
$\dfrac{3\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}}{7\lim_{x\to0}\frac{\tan 7x}{7x}}$

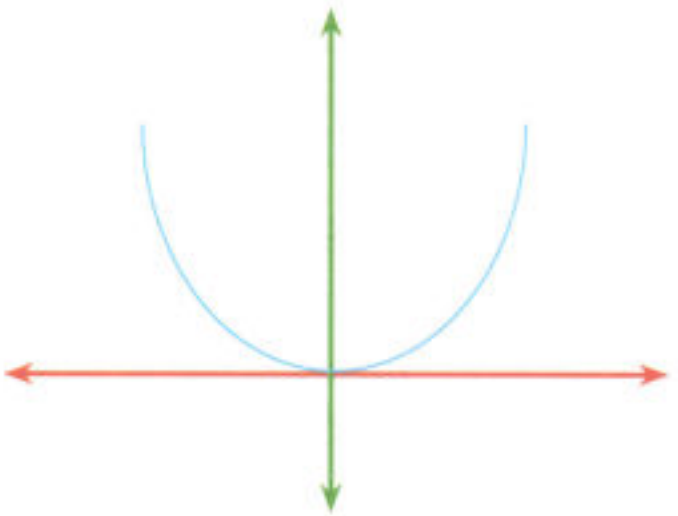
$\dfrac{(3).(3)}{7}=\dfrac{9}{7}$

شبكة المساعد @SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

الاستمرارية


الدالة غير مستمرة


الدالة مستمرة

الجزء الاول:الدالة الشطرية

مثلاً

$$f(x)=\begin{cases} \square & x \geq \text{رقم} \\ \square & x < \text{رقم} \end{cases}$$

الحد الفاصل

النوع الاول : يطلب استمرارية الدالة عند $X =$ الحد الفاصل

1. نجد صورة الحد الفاصل ليكن هو (a)

   بفرج المساواة $\longrightarrow$ $f(x)$

2. نأخذ غاية اليمين واليسار للحد الفاصل

$$\lim_{x \to a^+} \quad , \quad \lim_{x \to a^-}$$

3. يجب ان تكون الصورة = الغاية

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

سؤال 1 اذا كان:

$$f(x)\begin{cases} x^2+1 & , x \geq 2 \\ 2x+1 & , x < 2 \end{cases}$$

هل الدالة مستمرة عند $x=2$

1) الصورة:

$$f(2)=(2)^2+1$$
$$=4+1=\boxed{5}$$

2) غاية اليمين:

$$\lim_{x\to 2^+}(x^2+1)$$
$$=(2)^2+1=5=L_1$$

3) غاية اليسار:

$$\lim_{x\to 2^-}(2x+1)$$
$$=2(2)+1=5=L_2$$
$$L_1 = L_2$$
$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$$

الدالة مستمرة عند $x=2$

النوع الثاني: اذا طلب استمرارية عند رقم أكبر من الحد الفاصل او اصغر من الحد الفاصل.

* هنا نعوض ونجد صورة وغاية لهذا الرقم في الفرع الذي ينتمي اليه الرقم.

سؤال 2 لتكن:

$$f(x)\begin{cases} 8-x^2 & , x \geq 1 \\ 4x+1 & , x < 1 \end{cases}$$

1) ابحث استمرارية الدالة عند $x=1$

1) الصورة:

$$f(1)=8-(1)^2$$
$$=8-1=\boxed{7}$$

2) غاية اليمين:

$$\lim_{x\to 1^+}(8-x^2)$$
$$=8-(1)^2=7=L_1$$

3) غاية اليسار:

$$\lim_{x\to 1^-}(4x+1)$$
$$=4(1)+1$$
$$=4+1=5=L_2$$
$$L_1 \neq L_2$$
$$f(1) \neq \lim_{x\to 1} f(x)$$

الدالة مستمرة عند $x=1$

2) ابحث استمرارية الدالة عند $x=-1$

$$f(x)=4x+1$$
$$f(-1)=4(-1)+1$$
$$=-4+1=\boxed{-3}$$ الصورة

$$\lim_{x\to 1^-}(4x+1)$$
$$=4(-1)+1=\boxed{-3}$$ الغاية

$$f(-1)=\lim_{x\to 1^-} f(x) \quad x=-1$$

الدالة مستمرة عند $x=-1$

Telegram : @SadsHelp

سؤال 3

ابحث استمرارية الدالة عند $x=2$

* نقوم بمقارنة الرقم(2) بالحد الفاصل حيث
ان (2) اكبر من الحد الفاصل اكبر من (1)

$$f(x)=8-x^2$$
$$f(2)=8-(2)^2$$
$$=8-4=\boxed{4}$$ الصورة

$$\lim_{x\to 2}(8-x^2)$$
$$=8-(2)^2$$
$$=8-4=\boxed{4}$$ الغاية

$$f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)$$
$x=2$ الدالة مستمرة عند

سؤال 4 لتكن:

$$f(x)=\begin{cases}5-x^2 & , x<\sqrt{2}\\ x^2+1 & , x>\sqrt{2}\\ 4 & , x=\sqrt{2}\end{cases}$$

1) ابحث استمرارية الدالة عند $x=\sqrt{2}$

1) الصورة: $f(\sqrt{2})=4$

2) غاية اليمين:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+}(x^2+1)$$
$$=((\sqrt{2})^2+1)=2+1=3=L_1$$

3) غاية اليسار:

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-}(5-x^2)$$
$$=5-(\sqrt{2})^2$$
$$=5-2=3=L_2$$
$L_1=L_2$ موجودة

$$f(\sqrt{2})\ \lim_{x\to\sqrt{2}}(x)$$
$x=\sqrt{2}$ الدالة مستمرة عند

3) ابحث استمرارية الدالة عند $x=-1$

$$f(x)=5-x^2$$
$$f(-1)=5-(-1)^2$$
$$=5-1=\boxed{4}$$ الصورة

$$\lim_{x\to -1}(5-x^2)$$
$$=5-(-1)^2$$
$$=5-1=\boxed{4}$$ الغاية

$$f(-1)=\lim_{x\to -1} f(x)$$
$x=-1$ الدالة مستمرة عند

Telegram : @SadsHelp

النوع الثالث :

اذا طلب الاستمرارية على (R)

سؤال

لتكن : $f:R\to R$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2 & , \ x\geq\sqrt{2}\\ 8-x & , \ x<\sqrt{2}\end{cases}$$

اثبت ان الدالة مستمرة على (R)

1) نبحث استمرارية الدالة عند $x=2$

$$f(2)=(2)^2+2$$
$$=4+2=6 \quad \text{(الصورة)}$$

$$\lim_{x\to 2^+}(x^2+2)$$
$$=(2)^2+2=6=L_1$$

$$\lim_{x\to 2^-}(8-x)$$
$$=8-2=6=L_2$$

$L_1=L_2$ موجودة

$x=2$

2) الاستمرارية $\forall\ a<a$

$$f(a)=a^2+2$$

$$\lim_{x\to a}(x^2+2)$$
$$=a^2+2$$

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(a)$$

$\forall\ x>2$ مستمرة

3) الاستمرارية $\forall\ a<2$

$$f(a)=8-a$$

$$\lim_{x\to a}(8-x)$$
$$=8-a$$

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$$

$\forall\ x<2$ مستمرة

الدالة مستمرة على (R)

الملاحظات

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

الجزء الثاني : الدالة النسبية

اولاً : نجد مجال الدالة كما يلي :

1 نأخذ مقام الدالة ونساويه للصفر ونجد رقم (x)

2 المجال $R / \{ \text{قيم } x \}$

ثانياً : اذا كان السؤال مطلوب فيه نبحث الاستمرارية عند قيم (x) التي استخرجناها فالدالة غير مستمرة عند هذه القيم .

واذا مطلوب نبحث الاستمرارية عند رقم $= x$ نجد صورة وغاية

ملاحظات الدرس

شبكة المساعد
@SadsHelp

Telegram : @SadsHelp

لتكن: $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$

ابحث استمرارية الدالة عند

$x=3\ ,\ x=-3\ ,\ x=1$

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$

$x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9$

$x=\mp 3$

مجال الدالة $R/\{-3,3\}$

الدالة غير مستمرة

عند $x=3\ ,\ x=-3$

الاستمرارية عند $x=1$

$f(1)=\dfrac{1}{(1)^2-9}=\dfrac{1}{-8}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x^2-9}$

$=\dfrac{1}{(1)^2-9}=\dfrac{1}{-8}$

الدالة مستمرة عند $x=1$

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

لتكن: $f(x)=\dfrac{1}{x^2-16}$

ابحث استمرارية الدالة عند

$x=4\ ,\ x=2$

$f(x)=\dfrac{1}{x^2-16}$

$x^2-16=0 \Rightarrow x^2=$

$x=\mp 4$

الدالة غير مستمرة عند $x=4$

الاستمرارية عند $x=2$

$f(2)=\dfrac{1}{(2)^2-16}$

$=\dfrac{1}{4-16}=\dfrac{1}{-12}$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2-16}$

$=\dfrac{1}{(2)^2-16}=\dfrac{1}{4-16}$

$=\dfrac{1}{-12}$

الدالة مستمرة عند $x=2$

$f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$